

Arbres à descentes et dendrons

avec Victor Dubach (Nancy) et Stephan Wagner (TU Graz)

Paul Thévenin

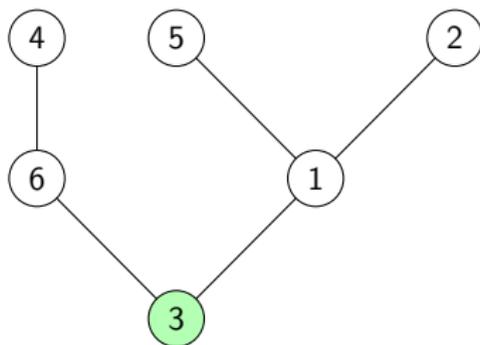
Rencontres de probabilités de Rouen

18 juin 2025



Arbres

- Arbre : graphe connexe sans cycle.
- Un sommet distingué : la racine. Orientés de la racine vers les feuilles.
- Sommets étiquetés de 1 à n , où n est la taille de l'arbre.



Descentes

- \mathfrak{T}_n ensemble des arbres enracinés à n sommets étiquetés (arbres de Cayley).
- On sait les compter : $|\mathfrak{T}_n| = n^{n-1}$ [Borchardt 1860, Cayley 1889].

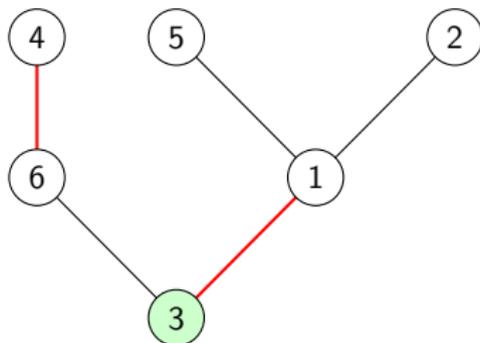
Descentes

- \mathfrak{T}_n ensemble des arbres enracinés à n sommets étiquetés (arbres de Cayley).
- On sait les compter : $|\mathfrak{T}_n| = n^{n-1}$ [Borchardt 1860, Cayley 1889].
- De nombreuses statistiques de ces arbres ont été étudiées : hauteur, degré des sommets, sous-arbres, ...

Descentes

- \mathfrak{T}_n ensemble des arbres enracinés à n sommets étiquetés (arbres de Cayley).
- On sait les compter : $|\mathfrak{T}_n| = n^{n-1}$ [Borchardt 1860, Cayley 1889].
- De nombreuses statistiques de ces arbres ont été étudiées : hauteur, degré des sommets, sous-arbres, ...
- Une arête $e \in t$ est une *descente* si elle va d'un sommet vers un autre d'étiquette plus petite. Soit $d(t)$ le nombre de descentes de t .

Exemple



$$d(t) = 2$$

Arbre aléatoire à descentes

- Pour $q \in [0, 1]$, soit $\mathcal{T}_n^{(q)} \in \mathfrak{T}_n$ l'arbre aléatoire tel que, pour tout $t \in \mathfrak{T}_n$:

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{T}_n^{(q)} = t\right) = \frac{1}{Z_n^{(q)}} q^{d(t)},$$

$$\text{où } Z_n^{(q)} = \sum_{t \in \mathfrak{T}_n} q^{d(t)}.$$

Arbre aléatoire à descentes

- Pour $q \in [0, 1]$, soit $\mathcal{T}_n^{(q)} \in \mathfrak{T}_n$ l'arbre aléatoire tel que, pour tout $t \in \mathfrak{T}_n$:

$$\mathbb{P} \left(\mathcal{T}_n^{(q)} = t \right) = \frac{1}{Z_n^{(q)}} q^{d(t)},$$

$$\text{où } Z_n^{(q)} = \sum_{t \in \mathfrak{T}_n} q^{d(t)}.$$

- Interpole entre deux modèles d'arbres très étudiés : arbres récursifs ($q = 0$) et arbres de Cayley uniformes ($q = 1$).

Arbre aléatoire à descentes

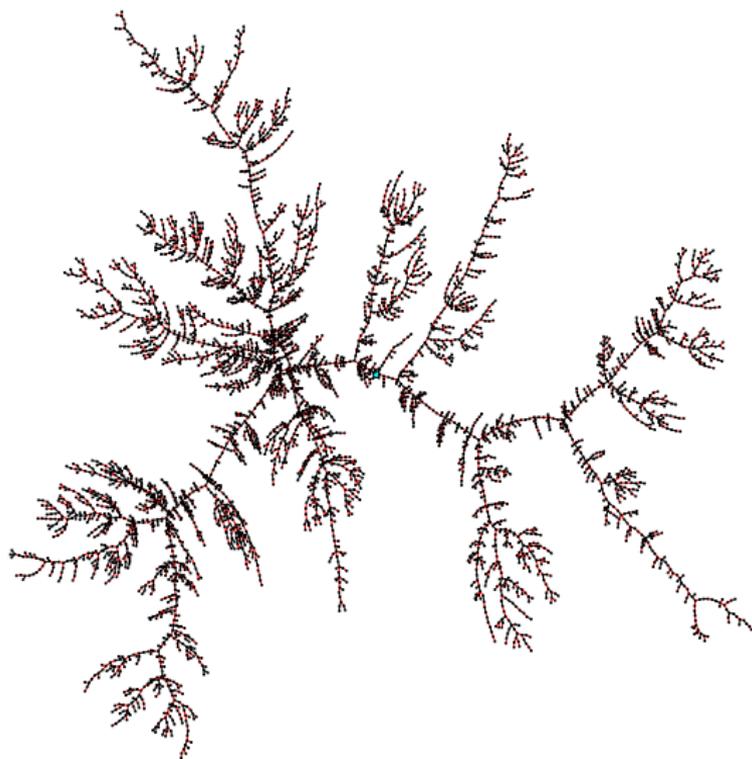
- Pour $q \in [0, 1]$, soit $\mathcal{T}_n^{(q)} \in \mathfrak{T}_n$ l'arbre aléatoire tel que, pour tout $t \in \mathfrak{T}_n$:

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{T}_n^{(q)} = t\right) = \frac{1}{Z_n^{(q)}} q^{d(t)},$$

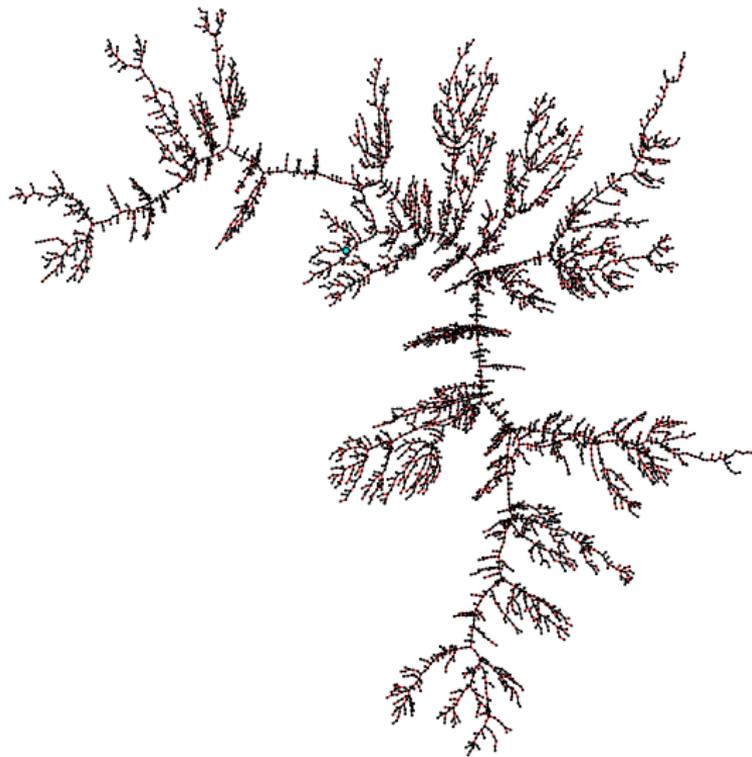
$$\text{où } Z_n^{(q)} = \sum_{t \in \mathfrak{T}_n} q^{d(t)}.$$

- Interpole entre deux modèles d'arbres très étudiés : arbres récursifs ($q = 0$) et arbres de Cayley uniformes ($q = 1$).
- But : "étudier la structure" de $\mathcal{T}_n^{(q)}$ pour n grand.

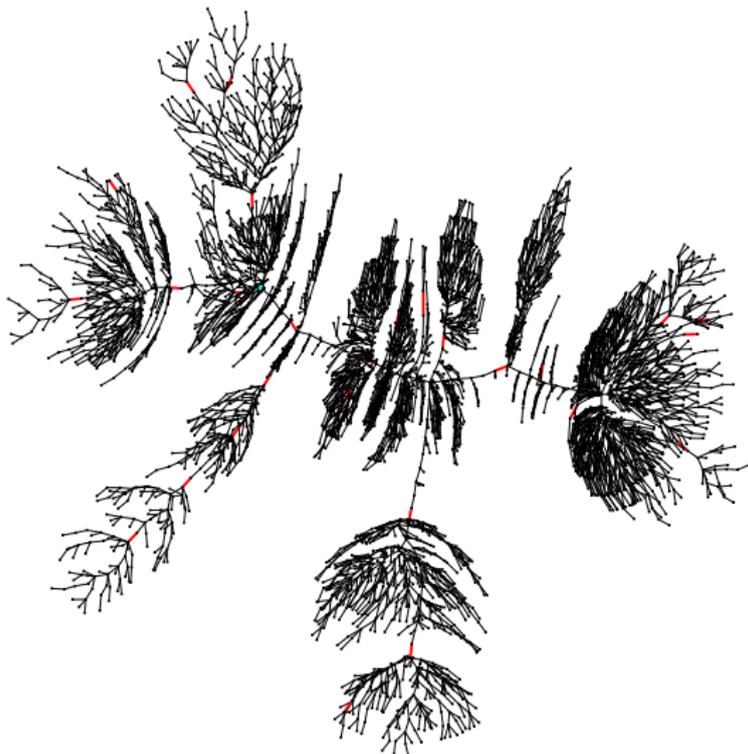
$$n = 5000, q = 1$$



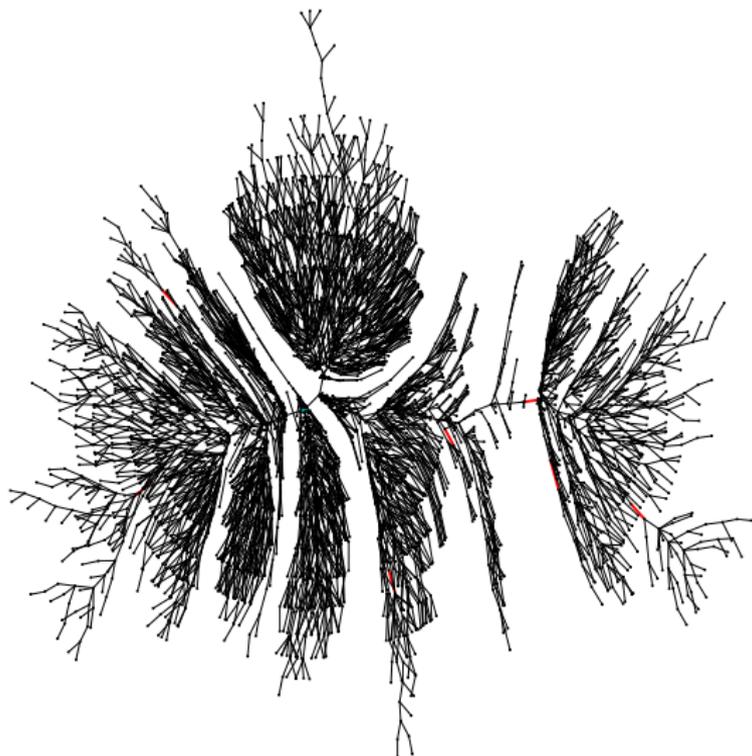
$$n = 5000, q = 0.5$$



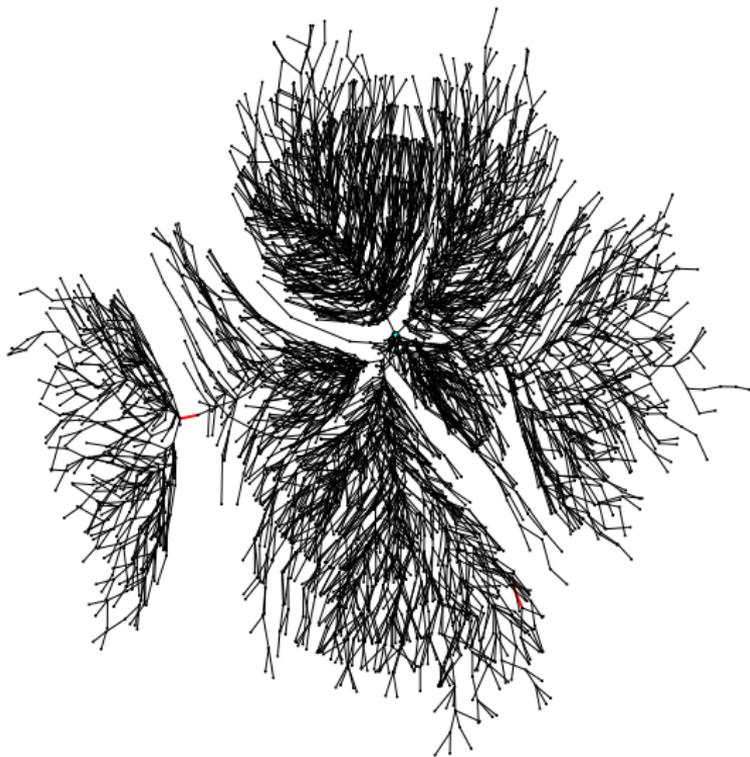
$$n = 5000, q = 1/1000$$



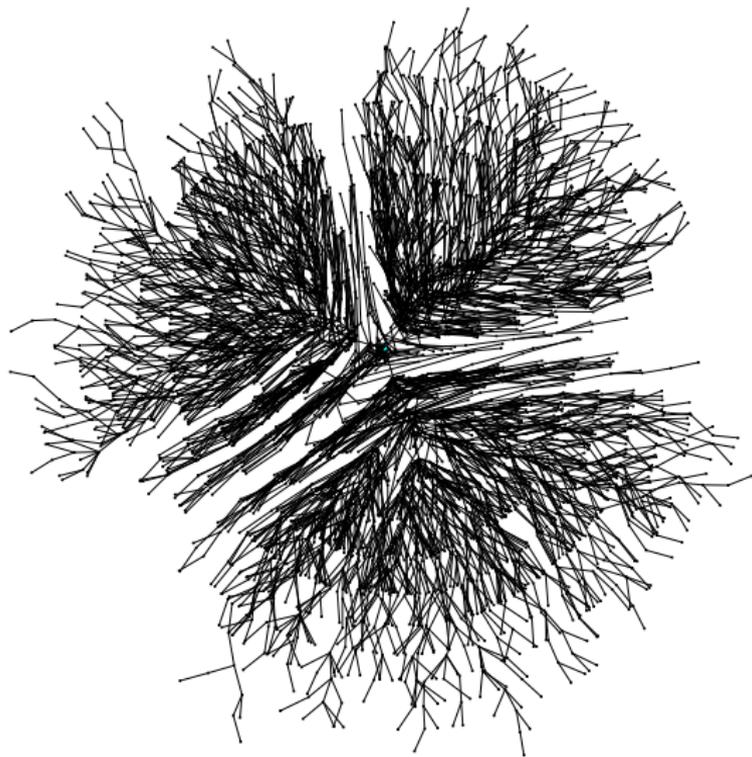
$$n = 5000, q = 1/2500$$



$$n = 5000, q = 1/10000$$



$$n = 5000, q = 0$$



Historique

- Permutations à descentes [Euler 1755] (24153).

Polynômes eulériens : $A_n(q) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{d(\sigma)}$.

Historique

- Permutations à descentes [Euler 1755] (24153).

Polynômes eulériens : $A_n(q) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{d(\sigma)}$.

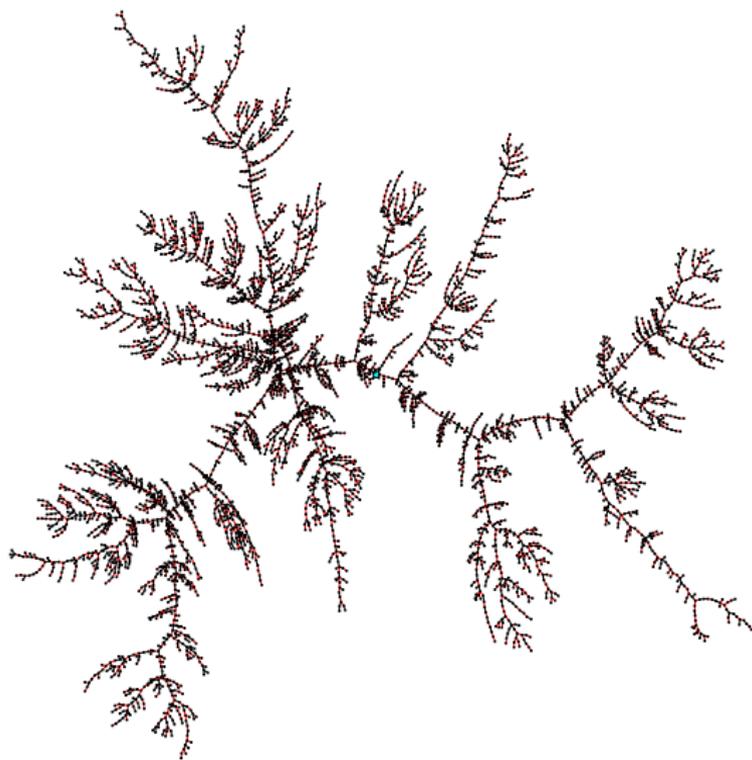
- Enumération pondérée des arbres à descentes [Eġecioglu-Remmel '86]
- $$\sum_{|t|=n} q^{d(t)} = \prod_{k=1}^{n-1} (n - k + kq)$$

Historique

- Permutations à descentes [Euler 1755] (24153).
Polynômes eulériens : $A_n(q) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{d(\sigma)}$.
- Enumération pondérée des arbres à descentes [Eġecioglu-Remmel '86]
 $\sum_{|t|=n} q^{d(t)} = \prod_{k=1}^{n-1} (n - k + kq)$
- Limite *locale* des permutations et arbres à descentes [T. & Wagner '23]

Historique

- Permutations à descentes [Euler 1755] (24153).
Polynômes eulériens : $A_n(q) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{d(\sigma)}$.
- Enumération pondérée des arbres à descentes [Eġecioglu-Remmel '86]
 $\sum_{|t|=n} q^{d(t)} = \prod_{k=1}^{n-1} (n - k + kq)$
- Limite *locale* des permutations et arbres à descentes [T. & Wagner '23]
- Limite *d'échelle* des arbres à descentes [Dubach, T. & Wagner '25+].

Cas $q = 1$ 

Cas $q = 1$.

Quand $q = 1$, $\mathcal{T}_n^{(1)}$ est un arbre uniforme à n sommets étiquetés.

Cas $q = 1$.

Quand $q = 1$, $\mathcal{T}_n^{(1)}$ est un arbre uniforme à n sommets étiquetés.

- Hauteur de $\mathcal{T}_n^{(1)} = \Theta(\sqrt{n})$ [Rényi & Szekeres '65].
- Degré de la racine $\mathcal{T}_n^{(1)} = \Theta(1)$.

Cas $q = 1$.

Quand $q = 1$, $\mathcal{T}_n^{(1)}$ est un arbre uniforme à n sommets étiquetés.

- Hauteur de $\mathcal{T}_n^{(1)} = \Theta(\sqrt{n})$ [Rényi & Szekeres '65].
- Degré de la racine $\mathcal{T}_n^{(1)} = \Theta(1)$.
- Limite d'échelle : Arbre brownien [Aldous '91,'93]

Limite d'échelle, $q = 1$

- On voit un arbre comme un espace métrique mesuré, avec la distance de graphe usuelle d_n (toutes les arêtes ont longueur 1) et la mesure uniforme $Unif_n$ sur ses sommets.

Limite d'échelle, $q = 1$

- On voit un arbre comme un espace métrique mesuré, avec la distance de graphe usuelle d_n (toutes les arêtes ont longueur 1) et la mesure uniforme $Unif_n$ sur ses sommets.

Théorème [Aldous '91 '93], [Le Gall '05]

Soit $\mathcal{T}_n^{(1)}$ un arbre uniforme à n sommets. Il existe un espace métrique compact aléatoire $(\mathcal{T}_\infty, d_\infty, \mu_\infty)$ tel que, en loi :

$$\left(\mathcal{T}_n^{(1)}, \frac{1}{\sqrt{n}} d_n, Unif_n \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (\mathcal{T}_\infty, d_\infty, \mu_\infty),$$

Limite d'échelle, $q = 1$

- On voit un arbre comme un espace métrique mesuré, avec la distance de graphe usuelle d_n (toutes les arêtes ont longueur 1) et la mesure uniforme $Unif_n$ sur ses sommets.

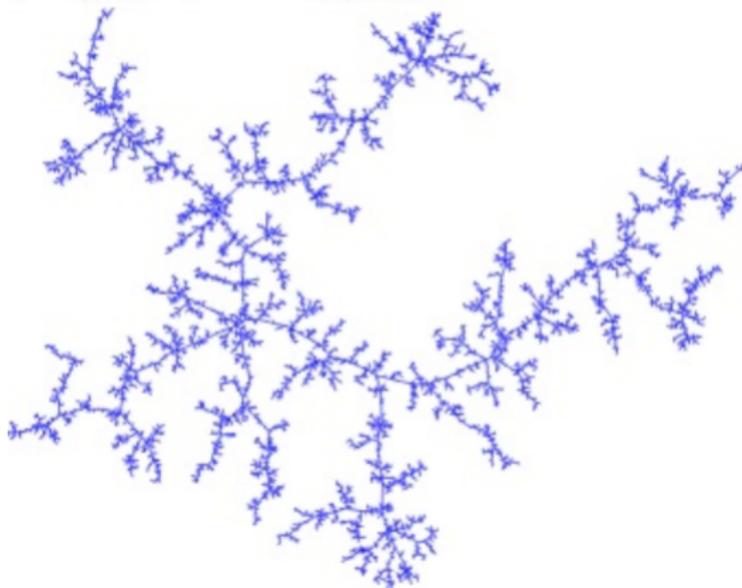
Théorème [Aldous '91 '93], [Le Gall '05]

Soit $\mathcal{T}_n^{(1)}$ un arbre uniforme à n sommets. Il existe un espace métrique compact aléatoire $(\mathcal{T}_\infty, d_\infty, \mu_\infty)$ tel que, en loi :

$$\left(\mathcal{T}_n^{(1)}, \frac{1}{\sqrt{n}} d_n, Unif_n \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (\mathcal{T}_\infty, d_\infty, \mu_\infty),$$

- \mathcal{T}_∞ : Arbre brownien d'Aldous.

Arbre brownien



Pour quelle topologie ?

- Topologie de Gromov-Hausdorff-Prohorov, très forte.

Pour quelle topologie ?

- Topologie de Gromov-Hausdorff-Prohorov, très forte.

En particulier, implique la convergence (plus faible) suivante :

Théorème [Aldous '91 '93], [Le Gall '05]

Soit $(\mathcal{T}_n^{(1)}, d_n, Unif_n)$ un arbre uniforme à n sommets. Soit $(\mathcal{T}_\infty, d_\infty, \mu_\infty)$ l'arbre Brownien d'Aldous. Soient u_n, v_n deux points i.i.d. uniformes dans $\mathcal{T}_1^{(n)}$, et u, v deux points i.i.d. selon μ dans \mathcal{T}_∞ . Alors, en loi :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} d_n(u_n, v_n) \xrightarrow{(d)} d_\infty(u, v).$$

Pour quelle topologie ?

- Topologie de Gromov-Hausdorff-Prohorov, très forte.

En particulier, implique la convergence (plus faible) suivante :

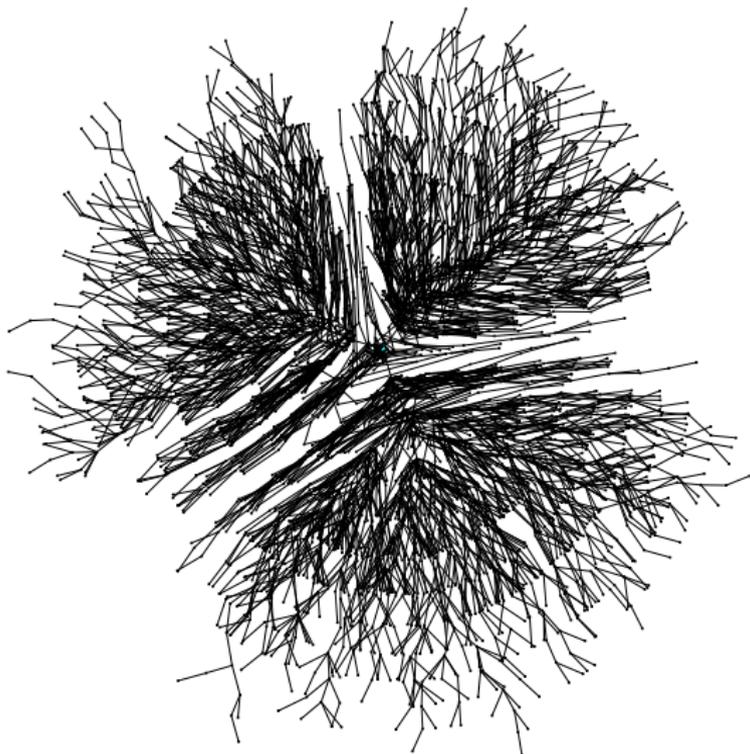
Théorème [Aldous '91 '93], [Le Gall '05]

Soit $(\mathcal{T}_n^{(1)}, d_n, \text{Unif}_n)$ un arbre uniforme à n sommets. Soit $(\mathcal{T}_\infty, d_\infty, \mu_\infty)$ l'arbre Brownien d'Aldous. Soient u_n, v_n deux points i.i.d. uniformes dans $\mathcal{T}_1^{(n)}$, et u, v deux points i.i.d. selon μ dans \mathcal{T}_∞ . Alors, en loi :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} d_n(u_n, v_n) \xrightarrow{(d)} d_\infty(u, v).$$

Vrai pour plusieurs points i.i.d. uniformes : pour tout $k \geq 1$ fixé,

$$(d_n(u_n^{(i)}, u_n^{(j)}))_{1 \leq i, j \leq k} \xrightarrow{(d)} (d_\infty(u^{(i)}, u^{(j)}))_{1 \leq i, j \leq k}.$$

Cas $q = 0$ 

Cas $q = 0$

Quand $q = 0$, $\mathcal{T}_n^{(0)}$ est un arbre aléatoire récursif.

- Aucune descente.

Cas $q = 0$

Quand $q = 0$, $\mathcal{T}_n^{(0)}$ est un arbre aléatoire récursif.

- Aucune descente.
- Construction récursive : les sommets arrivent l'un après l'autre, et choisissent un parent uniformément au hasard parmi les sommets déjà présents.

①

Cas $q = 0$

Quand $q = 0$, $\mathcal{T}_n^{(0)}$ est un arbre aléatoire récursif.

- Aucune descente.
- Construction récursive : les sommets arrivent l'un après l'autre, et choisissent un parent uniformément au hasard parmi les sommets déjà présents.

②

①

Cas $q = 0$

Quand $q = 0$, $\mathcal{T}_n^{(0)}$ est un arbre aléatoire récursif.

- Aucune descente.
- Construction récursive : les sommets arrivent l'un après l'autre, et choisissent un parent uniformément au hasard parmi les sommets déjà présents.



Cas $q = 0$

Quand $q = 0$, $\mathcal{T}_n^{(0)}$ est un arbre aléatoire récursif.

- Aucune descente.
- Construction récursive : les sommets arrivent l'un après l'autre, et choisissent un parent uniformément au hasard parmi les sommets déjà présents.

③



Cas $q = 0$

Quand $q = 0$, $\mathcal{T}_n^{(0)}$ est un arbre aléatoire récursif.

- Aucune descente.
- Construction récursive : les sommets arrivent l'un après l'autre, et choisissent un parent uniformément au hasard parmi les sommets déjà présents.



Cas $q = 0$

Quand $q = 0$, $\mathcal{T}_n^{(0)}$ est un arbre aléatoire récursif.

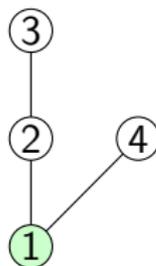
- Aucune descente.
- Construction récursive : les sommets arrivent l'un après l'autre, et choisissent un parent uniformément au hasard parmi les sommets déjà présents.



Cas $q = 0$

Quand $q = 0$, $\mathcal{T}_n^{(0)}$ est un arbre aléatoire récursif.

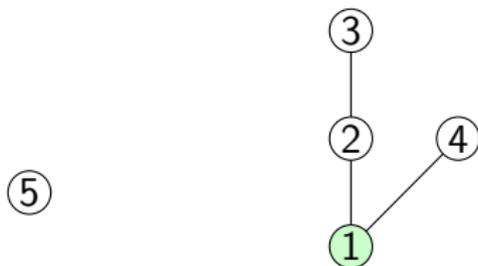
- Aucune descente.
- Construction récursive : les sommets arrivent l'un après l'autre, et choisissent un parent uniformément au hasard parmi les sommets déjà présents.



Cas $q = 0$

Quand $q = 0$, $\mathcal{T}_n^{(0)}$ est un arbre aléatoire récursif.

- Aucune descente.
- Construction récursive : les sommets arrivent l'un après l'autre, et choisissent un parent uniformément au hasard parmi les sommets déjà présents.

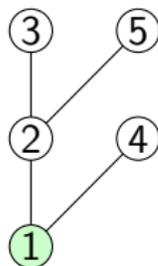


Cas $q = 0$

Quand $q = 0$, $\mathcal{T}_n^{(0)}$ est un arbre aléatoire récursif.

- Aucune descente.
- Construction récursive : les sommets arrivent l'un après l'autre, et choisissent un parent uniformément au hasard parmi les sommets déjà présents.

$\mathcal{T}_5^{(0)}$



Quelques résultats

- Hauteur de $\mathcal{T}_n^{(0)} \sim e \log n$ [Pittel '94].
- Degré de la racine dans $\mathcal{T}_n^{(0)} \sim \ln n$.

Quelques résultats

- Hauteur de $\mathcal{T}_n^{(0)} \sim e \log n$ [Pittel '94].
- Degré de la racine dans $\mathcal{T}_n^{(0)} \sim \ln n$.
- Les preuves reposent sur cette construction récursive, qui n'existe pas pour $q > 0$.

"Limite d'échelle"

- Pas de limite d'échelle "jolie".

"Limite d'échelle"

- Pas de limite d'échelle "jolie".

Lemme

Soit u_n, v_n deux sommets uniformes dans $\mathcal{T}_n^{(0)}$, et ρ_n sa racine. Alors, on a

-

$$\frac{d(u_n, \rho_n)}{\ln n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(\mathbb{P})} 1;$$

-

$$\frac{d(u_n, v_n)}{\ln n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(\mathbb{P})} 2.$$

"Limite d'échelle"

- Pas de limite d'échelle "jolie".

Lemme

Soit u_n, v_n deux sommets uniformes dans $\mathcal{T}_n^{(0)}$, et ρ_n sa racine. Alors, on a

-

$$\frac{d(u_n, \rho_n)}{\ln n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(\mathbb{P})} 1;$$

-

$$\frac{d(u_n, v_n)}{\ln n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(\mathbb{P})} 2.$$

- $\mathcal{T}_n^{(0)}$ devrait converger vers un espace "dégénéré" $E : d(u, v) = 2$ presque sûrement, pour u, v points i.i.d. uniformes de E .

L'hypercube H_n

Lemme

Soit $H_n := \{0, 1\}^n$, l'hypercube de dimension n . Soit u_n, v_n deux sommets uniformes de H_n , et $\rho_n := 0^n$ sa racine. Alors, on a



$$\frac{d_n(u_n, \rho_n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(\mathbb{P})} \frac{1}{2};$$



$$\frac{d_n(u_n, v_n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(\mathbb{P})} \frac{1}{2}.$$

Convergence au sens de Gromov-faible

Définition [Gromov '99]

Soit $(X_n, d_n, \mu_n)_{n \geq 1}$ une suite d'espaces métriques probabilisés. On dit que (X_n, d_n, μ_n) converge au sens de Gromov-faible si, pour tout $k \geq 1$:

$$\left(d_n(u_n^{(i)}, u_n^{(j)}) \right)_{1 \leq i, j \leq k} \text{ converge en loi,}$$

où $(u_n^{(i)}, i \leq k)$ sont i.i.d. selon μ_n .

Convergence des arbres récursifs

Théorème

La suite $\left(\mathcal{T}_n^{(0)}, \frac{1}{\ln n} d_n, \text{Unif}_n \right)_{n \geq 1}$ converge en loi au sens de Gromov-faible.

Convergence des arbres récursifs

Théorème

La suite $\left(\mathcal{T}_n^{(0)}, \frac{1}{\ln n} d_n, \text{Unif}_n \right)_{n \geq 1}$ converge en loi au sens de Gromov-faible.

$$\text{Preuve : } \left(\frac{1}{\ln n} d_n(u_n^{(i)}, u_n^{(j)}) \right)_{1 \leq i, j \leq 3} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Convergence des arbres uniformes

Théorème

La suite $\left(\mathcal{T}_n^{(1)}, \frac{1}{\sqrt{n}} d_n, Unif_n \right)_{n \geq 1}$ converge en loi au sens de Gromov-faible.

Convergence des arbres uniformes

Théorème

La suite $\left(\mathcal{T}_n^{(1)}, \frac{1}{\sqrt{n}} d_n, Unif_n \right)_{n \geq 1}$ converge en loi au sens de Gromov-faible.

Preuve : $\left(d_n(u_n^{(i)}, u_n^{(j)}) \right)_{0 \leq i, j \leq k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \left(d_{\mathcal{T}_\infty}(u^{(i)}, u^{(j)}) \right)_{0 \leq i, j \leq k}$.

Dendrons

Idée [Elek & Tardos '22] : définir un espace limite "naturel" pour les arbres récursifs, unifier les deux notions de convergence.

Dendrons

Idée [Elek & Tardos '22] : définir un espace limite "naturel" pour les arbres récurrents, unifier les deux notions de convergence.

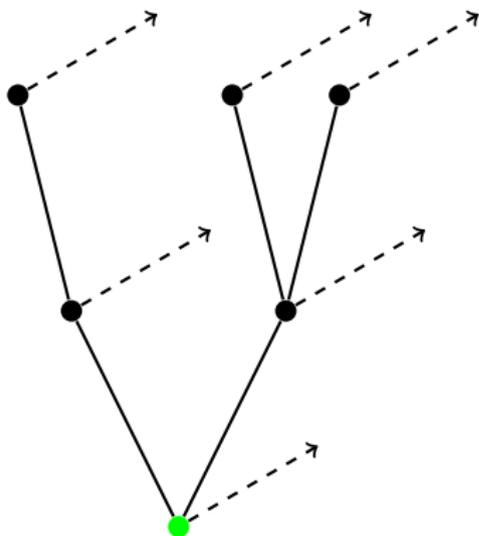
Définition [Elek & Tardos '22]

Un dendron $D = (T, d, \nu)$ est la donnée d'un arbre métrique (T, d) et d'une mesure de probabilité ν sur l'ensemble $A_D := T \times [0, \infty)$. On définit une fonction "distance" $d_D : D \rightarrow \mathbb{R}_+$ par: $\forall x, y \in T, \forall a, b \geq 0$:

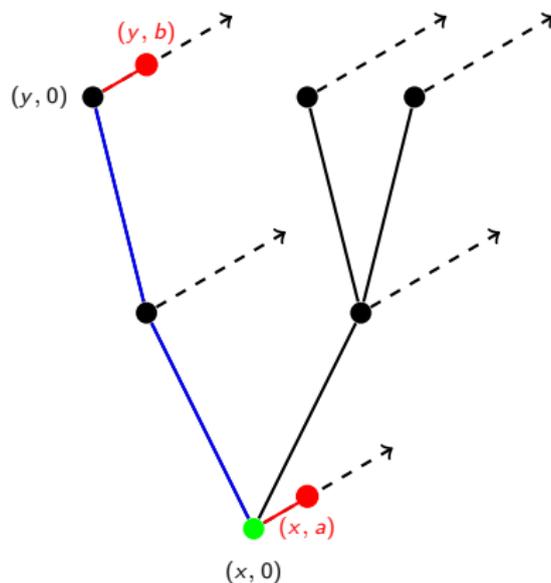
$$d_D((x, a), (y, b)) := d(x, y) + a + b.$$

- d_D n'est pas une distance : $d_D((x, a), (x, a)) = 2a$.

Structure de dendron



Structure de dendron



$$d_D((x, a), (y, b)) = a + d(x, y) + b.$$

Limites d'arbres et dendrons

Théorème [Elek & Tardos '22], [Janson '21]

- Toute suite d'arbres (renormalisés) qui converge au sens de Gromov-faible converge vers un unique dendron limite.

Limites d'arbres et dendrons

Théorème [Elek & Tardos '22], [Janson '21]

- Toute suite d'arbres (renormalisés) qui converge au sens de Gromov-faible converge vers un unique dendron limite.
- Tout dendron est la limite d'une suite d'arbres (renormalisés).

Limites d'arbres et dendrons

Théorème [Elek & Tardos '22], [Janson '21]

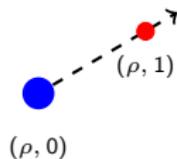
- Toute suite d'arbres (renormalisés) qui converge au sens de Gromov-faible converge vers un unique dendron limite.
- Tout dendron est la limite d'une suite d'arbres (renormalisés).

Définition [Elek & Tardos '22], [Janson '21]

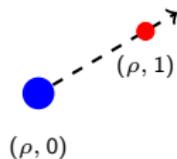
On dit que (T_n, d_n, μ_n) converge vers $D := (T, d, \nu)$ si :

$$\left(d_n(u_n^{(i)}, u_n^{(j)}) \right)_{0 \leq i, j \leq k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \left(d_D(u^{(i)}, u^{(j)}) \right)_{0 \leq i, j \leq k},$$

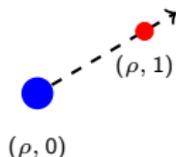
où les $(u^{(i)})_{1 \leq i \leq k}$ sont i.i.d. selon la mesure ν .

Dendron limite de $\mathcal{T}_n^{(0)}$ 

- Arbre $(T, d) = \{\rho\}$ (distance triviale).

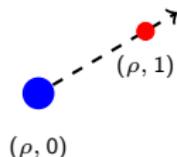
Dendron limite de $\mathcal{T}_n^{(0)}$ 

- Arbre $(T, d) = \{\rho\}$ (distance triviale).
- Mesure $\nu = \delta_{(\rho, 1)}$.

Dendron limite de $\mathcal{T}_n^{(0)}$ 

- Arbre $(T, d) = \{\rho\}$ (distance triviale).
- Mesure $\nu = \delta_{(\rho, 1)}$.
- Soient u, v i.i.d. selon ν . Alors $u = v = (\rho, 1)$ et

$$d_D(u, v) = d_D((\rho, 1), (\rho, 1)) = d(\rho, \rho) + 1 + 1 = 2.$$

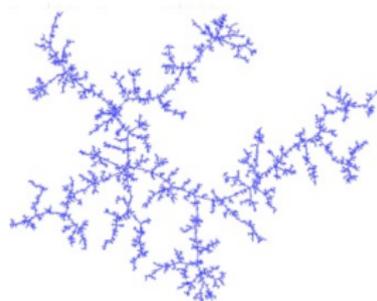
Dendron limite de $\mathcal{T}_n^{(0)}$ 

- Arbre $(T, d) = \{\rho\}$ (distance triviale).
- Mesure $\nu = \delta_{(\rho, 1)}$.
- Soient u, v i.i.d. selon ν . Alors $u = v = (\rho, 1)$ et

$$d_D(u, v) = d_D((\rho, 1), (\rho, 1)) = d(\rho, \rho) + 1 + 1 = 2.$$

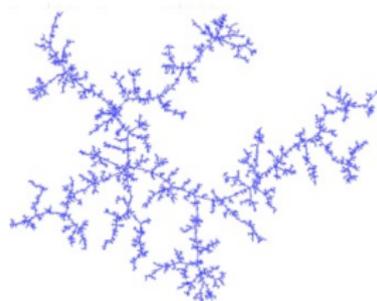
- Notation $\Upsilon_\mu := \{\rho\} \times [0, \infty)$ avec mesure μ sur $[0, \infty)$. Ici, Υ_{δ_1} .

Dendron limite de $\mathcal{T}_n^{(1)}$

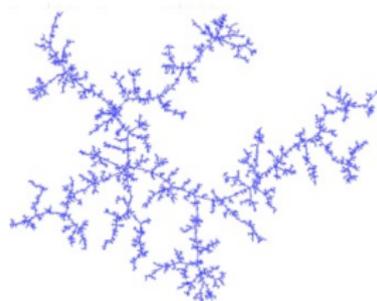


- Arbre $(T, d) = (\mathcal{T}_\infty, d_\infty)$.

Dendron limite de $\mathcal{T}_n^{(1)}$

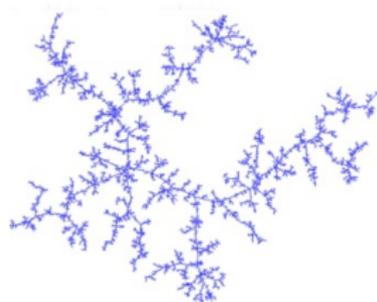


- Arbre $(T, d) = (\mathcal{T}_\infty, d_\infty)$.
- Mesure $\nu = \mu_\infty \times \delta_0$, à support dans \mathcal{T}_∞ (les demi-droites sont de mesure nulle).

Dendron limite de $\mathcal{T}_n^{(1)}$ 

- Arbre $(T, d) = (\mathcal{T}_\infty, d_\infty)$.
- Mesure $\nu = \mu_\infty \times \delta_0$, à support dans \mathcal{T}_∞ (les demi-droites sont de mesure nulle).
- Soient u, v i.i.d. selon ν . Alors $u = (x, 0), v = (y, 0) \in \mathcal{T}_\infty$, et

$$d_D(u, v) = d_D((x, 0), (y, 0)) = d_\infty(x, y).$$

Dendron limite de $\mathcal{T}_n^{(1)}$ 

- Arbre $(T, d) = (\mathcal{T}_\infty, d_\infty)$.
- Mesure $\nu = \mu_\infty \times \delta_0$, à support dans \mathcal{T}_∞ (les demi-droites sont de mesure nulle).
- Soient u, v i.i.d. selon ν . Alors $u = (x, 0), v = (y, 0) \in \mathcal{T}_\infty$, et

$$d_D(u, v) = d_D((x, 0), (y, 0)) = d_\infty(x, y).$$

- Les arbres sont des dendrons.

Autres exemples

- Convergence des arbres uniformes, arbres de Bienaymé-Galton-Watson vers l'arbre brownien [Janson '21];

Autres exemples

- Convergence des arbres uniformes, arbres de Bienaymé-Galton-Watson vers l'arbre brownien [Janson '21];
- Convergence des split trees, arbres récursifs, modèles d'arbres logarithmiques vers Υ_{δ_1} [Janson '21];

Autres exemples

- Convergence des arbres uniformes, arbres de Bienaymé-Galton-Watson vers l'arbre brownien [Janson '21];
- Convergence des split trees, arbres récursifs, modèles d'arbres logarithmiques vers Υ_{δ_1} [Janson '21];
- Convergence d'arbres à attachement uniforme avec gel vers $\Upsilon_{\mu, \mu}$ mesure à densité [BBRKK '23].

Notre résultat

Théorème [Dubach, T. & Wagner '25+]

Soit $(q_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $[0, 1]$. Alors, on a pour la convergence Gromov-faible :

- Si $q_n \rightarrow c > 0$, alors $\frac{c-1}{\sqrt{c} \log c} \frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{T}_n^{(q_n)} \rightarrow \mathcal{T}_\infty$.

Notre résultat

Théorème [Dubach, T. & Wagner '25+]

Soit $(q_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $[0, 1]$. Alors, on a pour la convergence Gromov-faible :

- Si $q_n \rightarrow c > 0$, alors $\frac{c-1}{\sqrt{c} \log c} \frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{T}_n^{(q_n)} \rightarrow \mathcal{T}_\infty$.
- Si $nq_n \rightarrow +\infty$, alors $\frac{q_n-1}{\sqrt{q_n} \ln(q_n)} \frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{T}_n^{(q_n)} \rightarrow \mathcal{T}_\infty$.

Notre résultat

Théorème [Dubach, T. & Wagner '25+]

Soit $(q_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $[0, 1]$. Alors, on a pour la convergence Gromov-faible :

- Si $q_n \rightarrow c > 0$, alors $\frac{c-1}{\sqrt{c} \log c} \frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{T}_n^{(q_n)} \rightarrow \mathcal{T}_\infty$.
- Si $nq_n \rightarrow +\infty$, alors $\frac{q_n-1}{\sqrt{q_n} \ln(q_n)} \frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{T}_n^{(q_n)} \rightarrow \mathcal{T}_\infty$.
- Si $nq_n \rightarrow 0$, alors $\frac{1}{\ln n} \mathcal{T}_n^{(q_n)} \rightarrow \Upsilon_{\delta_1}$.

Notre résultat

Théorème [Dubach, T. & Wagner '25+]

Soit $(q_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $[0, 1]$. Alors, on a pour la convergence Gromov-faible :

- Si $q_n \rightarrow c > 0$, alors $\frac{c-1}{\sqrt{c} \log c} \frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{T}_n^{(q_n)} \rightarrow \mathcal{T}_\infty$.
- Si $nq_n \rightarrow +\infty$, alors $\frac{q_n-1}{\sqrt{q_n} \ln(q_n)} \frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{T}_n^{(q_n)} \rightarrow \mathcal{T}_\infty$.
- Si $nq_n \rightarrow 0$, alors $\frac{1}{\ln n} \mathcal{T}_n^{(q_n)} \rightarrow \Upsilon_{\delta_1}$.
- Si $nq_n \rightarrow a \in (0, +\infty)$, alors $\frac{1}{\ln n} \mathcal{T}_n^{(q_n)} \rightarrow \mathcal{D}_a$.

Dendron à attachement préférentiel

Construction récursive.

- Soit (p_1, p_2, \dots) une suite telle que $p_i > 0$ pour tout i , et $\sum_{i \geq 1} p_i = 1$.

Dendron à attachement préférentiel

Construction récursive.

- Soit (p_1, p_2, \dots) une suite telle que $p_i > 0$ pour tout i , et $\sum_{i \geq 1} p_i = 1$.
- La racine est numérotée 1 ;

Dendron à attachement préférentiel

Construction récursive.

- Soit (p_1, p_2, \dots) une suite telle que $p_i > 0$ pour tout i , et $\sum_{i \geq 1} p_i = 1$.
- La racine est numérotée 1 ;
- le sommet 2 a pour parent le sommet 1 ;

Dendron à attachement préférentiel

Construction récursive.

- Soit (p_1, p_2, \dots) une suite telle que $p_i > 0$ pour tout i , et $\sum_{i \geq 1} p_i = 1$.
- La racine est numérotée 1 ;
- le sommet 2 a pour parent le sommet 1 ;
- Supposons que les sommets $1, \dots, i$ sont dans l'arbre. Le sommet $(i + 1)$ décide que son parent sera
 - j avec probabilité p_j , pour $j \leq i - 1$;
 - i avec probabilité $(1 - \sum_{j=1}^{i-1} p_j)$.

Dendron à attachement préférentiel

Construction récursive.

- Soit (p_1, p_2, \dots) une suite telle que $p_i > 0$ pour tout i , et $\sum_{i \geq 1} p_i = 1$.
- La racine est numérotée 1 ;
- le sommet 2 a pour parent le sommet 1 ;
- Supposons que les sommets $1, \dots, i$ sont dans l'arbre. Le sommet $(i + 1)$ décide que son parent sera
 - j avec probabilité p_j , pour $j \leq i - 1$;
 - i avec probabilité $(1 - \sum_{j=1}^{i-1} p_j)$.

Chaque arête a longueur 1, et la mesure ν est définie comme

$$\nu = \sum_{i \geq 1} p_i \delta_{(i,1)}.$$

Le dendron \mathfrak{D}_a

- Soient $(X_i)_{i \geq 1}$ des variables i.i.d. de loi $Beta(1, a)$: densité $a(1-x)^{a-1}$.

Le dendron \mathfrak{D}_a

- Soient $(X_i)_{i \geq 1}$ des variables i.i.d. de loi $Beta(1, a)$: densité $a(1-x)^{a-1}$.
- On construit $p_1 = X_1$ et, pour tout $i \geq 2$, $p_i = X_i(1 - \sum_{j=1}^{i-1} p_j)$, de sorte que $\sum_{i \geq 1} p_i = 1$.

Le dendron \mathcal{D}_a

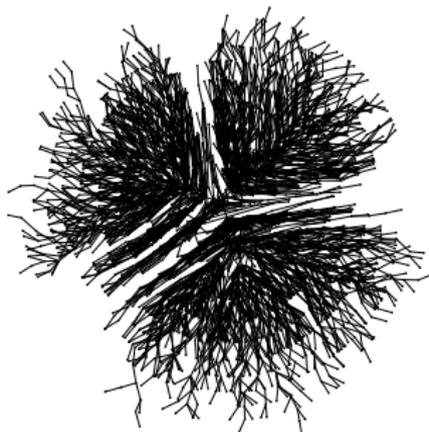
- Soient $(X_i)_{i \geq 1}$ des variables i.i.d. de loi $Beta(1, a)$: densité $a(1-x)^{a-1}$.
- On construit $p_1 = X_1$ et, pour tout $i \geq 2$, $p_i = X_i(1 - \sum_{j=1}^{i-1} p_j)$, de sorte que $\sum_{i \geq 1} p_i = 1$.
- On construit \mathcal{D}_a comme le dendron à attachement préférentiel associé à (p_1, p_2, \dots) .

Composante racine

- L'arbre à descentes $\mathcal{T}_n^{(q_n)}$ est un ensemble d'arbres récursifs greffés les uns sur les autres.
- Composante racine : le plus grand sous-arbre sans descente contenant la racine

Composante racine

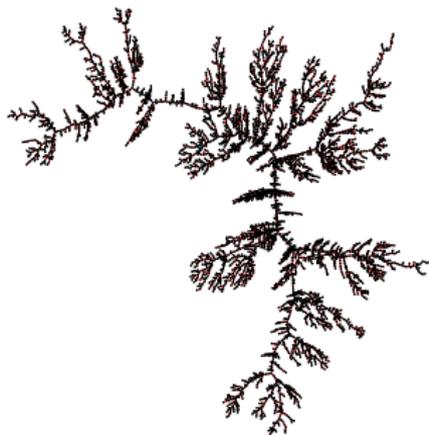
- L'arbre à descentes $\mathcal{T}_n^{(q_n)}$ est un ensemble d'arbres récursifs greffés les uns sur les autres.
- Composante racine : le plus grand sous-arbre sans descente contenant la racine



Pour $nq_n \rightarrow 0$, la composante racine a taille $n - o(n)$.

Composante racine

- L'arbre à descentes $\mathcal{T}_n^{(q_n)}$ est un ensemble d'arbres récursifs greffés les uns sur les autres.
- Composante racine : le plus grand sous-arbre sans descendance contenant la racine



Pour $nq_n \rightarrow \infty$, la composante racine a taille $o(n)$.

Composante racine

- L'arbre à descentes $\mathcal{T}_n^{(q_n)}$ est un ensemble d'arbres récursifs greffés les uns sur les autres.
- Composante racine : le plus grand sous-arbre sans descente contenant la racine



Pour $nq_n \rightarrow a \in (0, \infty)$, la composante racine a taille $\Theta(n)$.

Heuristique

- Dans le cas $nq_n \rightarrow a$, on peut voir un arbre à descentes comme un ensemble d'arbres récursifs (=composantes) de tailles $\Theta(n)$ greffés les uns sur les autres, selon une structure arborescente.

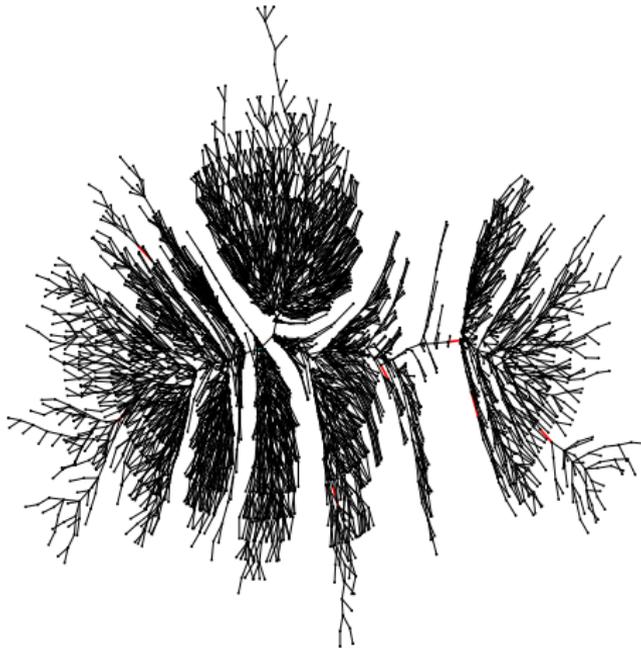
Heuristique

- Dans le cas $nq_n \rightarrow a$, on peut voir un arbre à descentes comme un ensemble d'arbres récursifs (=composantes) de tailles $\Theta(n)$ greffés les uns sur les autres, selon une structure arborescente.
- Dans chacun de ces arbres récursifs, les sommets sont à distance $\ln(\Theta(n)) \approx \ln(n)$ de la racine de l'arbre en question.

Heuristique

- Dans le cas $nq_n \rightarrow a$, on peut voir un arbre à descentes comme un ensemble d'arbres récursifs (=composantes) de tailles $\Theta(n)$ greffés les uns sur les autres, selon une structure arborescente.
- Dans chacun de ces arbres récursifs, les sommets sont à distance $\ln(\Theta(n)) \approx \ln(n)$ de la racine de l'arbre en question.
- Soient u_n, v_n uniformes dans $\mathcal{T}_n^{(q_n)}$.
 - S'ils sont dans la même composante, $d_n(u_n, v_n) \sim 2 \ln(n)$;
 - Sinon, le chemin entre u_n et v_n passe par k composantes, et $d_n(u_n, v_n) \approx \ln(n) + k \ln(n) + \ln(n) = (k + 2) \ln(n)$.

Merci !



Etude de la composante racine

Reste à estimer les tailles des composantes.

Fonction génératrice des arbres à descentes :

$$A(x, q) = \sum_t \frac{1}{|t|!} x^{|t|} q^{d(t)}$$

Etude de la composante racine

Reste à estimer les tailles des composantes.

Fonction génératrice des arbres à descentes : $A(x, q) = \sum_t \frac{1}{|t|!} x^{|t|} q^{d(t)}$

Ajout de la taille $c(t)$ de la composante racine :

$$G(x, q, s) = \sum_t \frac{1}{|t|!} x^{|t|} q^{d(t)} s^{c(t)}$$

Etude de la composante racine

Reste à estimer les tailles des composantes.

Fonction génératrice des arbres à descentes : $A(x, q) = \sum_t \frac{1}{|t|!} x^{|t|} q^{d(t)}$

Ajout de la taille $c(t)$ de la composante racine :

$$G(x, q, s) = \sum_t \frac{1}{|t|!} x^{|t|} q^{d(t)} s^{c(t)}$$

On cherche à estimer les moments de $\frac{c(t)}{n}$.

$$\mathbb{E} \left[e^{y \frac{c(\mathcal{T}_n^{(q,n)})}{n}} \right] = \frac{[x^n] G(x, \frac{a}{n}, e^{y/n})}{[x^n] A(x, \frac{a}{n})}$$

La fonction $A(x, q)$

- Décomposition récursive de l'arbre $\mathcal{T}_n^{(q)}$, selon la position de l'étiquette $\textcircled{1} \Rightarrow$ Equation implicite vérifiée par $A(x, q)$:

$$x = \frac{e^{-qA(x, q)} - e^{-A(x, q)}}{1 - q}$$

- Par méthode du point col [Flajolet & Sedgewick '09], on obtient

$$[x^n]A(x, \frac{a}{n}) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^{a-1}}{e^a \Gamma(a+1)}.$$

La fonction $G(x, q, s)$

On peut exprimer G en fonction de A . Soit T un arbre, $C(T)$ sa composante racine.

- $C(T)$ a une structure d'arbre récursif.

La fonction $G(x, q, s)$

On peut exprimer G en fonction de A . Soit T un arbre, $C(T)$ sa composante racine.

- $C(T)$ a une structure d'arbre récursif.
- On peut décomposer T comme recollement d'arbres *dont la composante racine est de taille 1* sur la composante $C(T)$.

La fonction $G(x, q, s)$

On peut exprimer G en fonction de A . Soit T un arbre, $C(T)$ sa composante racine.

- $C(T)$ a une structure d'arbre récursif.
- On peut décomposer T comme recollement d'arbres dont la composante racine est de taille 1 sur la composante $C(T)$.
- Se traduit par une équation

$$G(x, q, s) = \sum_{k \geq 0} \frac{(k-1)!}{k!} \left(G^{(1)}(x, q) \right)^k s^k,$$

où $G^{(1)}(x, q)$ est la fonction génératrice des arbres dont la composante racine est de taille 1.

La fonction $G(x, q, s)$

On peut exprimer G en fonction de A . Soit T un arbre, $C(T)$ sa composante racine.

- $C(T)$ a une structure d'arbre récursif.
- On peut décomposer T comme recollement d'arbres dont la composante racine est de taille 1 sur la composante $C(T)$.
- Se traduit par une équation

$$G(x, q, s) = \sum_{k \geq 0} \frac{(k-1)!}{k!} \left(G^{(1)}(x, q) \right)^k s^k,$$

où $G^{(1)}(x, q)$ est la fonction génératrice des arbres dont la composante racine est de taille 1.

- On a donc $G(x, q, s) = -\log(1 - sG^{(1)}(x, q))$.

La fonction $G(x, q, s)$

On peut exprimer G en fonction de A . Soit T un arbre, $C(T)$ sa composante racine.

- $C(T)$ a une structure d'arbre récursif.
- On peut décomposer T comme recollement d'arbres dont la composante racine est de taille 1 sur la composante $C(T)$.
- Se traduit par une équation

$$G(x, q, s) = \sum_{k \geq 0} \frac{(k-1)!}{k!} \left(G^{(1)}(x, q) \right)^k s^k,$$

où $G^{(1)}(x, q)$ est la fonction génératrice des arbres dont la composante racine est de taille 1.

- On a donc $G(x, q, s) = -\log(1 - sG^{(1)}(x, q))$.
- En $s = 1$, cela donne $A(x, q) = -\log(1 - G^{(1)}(x, q))$.

La fonction $G(x, q, s)$

On peut exprimer G en fonction de A . Soit T un arbre, $C(T)$ sa composante racine.

- $C(T)$ a une structure d'arbre récursif.
- On peut décomposer T comme recollement d'arbres dont la composante racine est de taille 1 sur la composante $C(T)$.
- Se traduit par une équation

$$G(x, q, s) = \sum_{k \geq 0} \frac{(k-1)!}{k!} \left(G^{(1)}(x, q) \right)^k s^k,$$

où $G^{(1)}(x, q)$ est la fonction génératrice des arbres dont la composante racine est de taille 1.

- On a donc $G(x, q, s) = -\log(1 - sG^{(1)}(x, q))$.
- En $s = 1$, cela donne $A(x, q) = -\log(1 - G^{(1)}(x, q))$.

- En remplaçant, on obtient

$$G(x, q, s) = -\log(1 - s(1 - e^{-A(x, q)}))$$

- Par point col, on obtient

$$[x^n]G(x, a/n, e^{y/n}) \sim n^{a-1} e^{-a} \sum_{k \geq 0} \frac{y^k}{\Gamma(a+k+1)}.$$

- Par point col, on obtient

$$[x^n]G(x, a/n, e^{y/n}) \sim n^{a-1} e^{-a} \sum_{k \geq 0} \frac{y^k}{\Gamma(a+k+1)}.$$

- Finalement,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{y \frac{c(\mathcal{T}_n^{(q_n)})}{n}} \right] &= \frac{[x^n]G(x, \frac{a}{n}, e^{y/n})}{[x^n]A(x, \frac{a}{n})} \\ &\rightarrow \sum_{k \geq 0} \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+k+1)} y^k. \end{aligned}$$

- Par point col, on obtient

$$[x^n]G(x, a/n, e^{y/n}) \sim n^{a-1} e^{-a} \sum_{k \geq 0} \frac{y^k}{\Gamma(a+k+1)}.$$

- Finalement,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{y \frac{c(\mathcal{T}_n^{(a/n)})}{n}} \right] &= \frac{[x^n]G(x, \frac{a}{n}, e^{y/n})}{[x^n]A(x, \frac{a}{n})} \\ &\rightarrow \sum_{k \geq 0} \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+k+1)} y^k. \end{aligned}$$

- Distribution discrète ! $\frac{c(\mathcal{T}_n^{(a/n)})}{n} \sim \text{Beta}(1, a)$ densité $a(1-x)^{a-1}$.

Limite locale

- $(\mathcal{T}_n)_{n \geq 1}$ suite d'arbres (aléatoires) enracinés à n sommets, \mathcal{T}_* arbre avec un nombre infini de sommets.
- Limite locale : comprendre les voisinages finis de la racine de \mathcal{T}_n . Soit $B_r(T)$ la boule de rayon r autour de la racine de l'arbre T .

Limite locale

- $(\mathcal{T}_n)_{n \geq 1}$ suite d'arbres (aléatoires) enracinés à n sommets, \mathcal{T}_* arbre avec un nombre infini de sommets.
- Limite locale : comprendre les voisinages finis de la racine de \mathcal{T}_n . Soit $B_r(T)$ la boule de rayon r autour de la racine de l'arbre T .

On dit que $\mathcal{T}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loc)} \mathcal{T}_*$ si, pour tout $r \geq 0$ fixé :

$$B_r(\mathcal{T}_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} B_r(\mathcal{T}_*).$$

Limite locale

- $(\mathcal{T}_n)_{n \geq 1}$ suite d'arbres (aléatoires) enracinés à n sommets, \mathcal{T}_* arbre avec un nombre infini de sommets.
- Limite locale : comprendre les voisinages finis de la racine de \mathcal{T}_n . Soit $B_r(T)$ la boule de rayon r autour de la racine de l'arbre T .

On dit que $\mathcal{T}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loc)} \mathcal{T}_*$ si, pour tout $r \geq 0$ fixé :

$$B_r(\mathcal{T}_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} B_r(\mathcal{T}_*).$$

- Pas de renormalisation des distances.

Limite locale

Theorem [\approx Kesten '86]

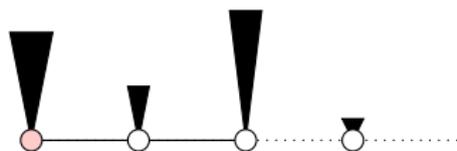
Soit $\mathcal{T}_n^{(1)}$ un arbre uniforme à n sommets. Il existe un arbre aléatoire infini \mathcal{T}_* stel que, en loi :

$$\mathcal{T}_n^{(1)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loc)} \mathcal{T}_*.$$

- \mathcal{T}_* : Arbre de Kesten.

Arbre de Kesten

- Une branche infinie, sur laquelle on attache des arbres aléatoires (p.s. finis) i.i.d..



Extensions

- Généralisé à des arbres de Bienaymé-Galton-Watson.
- Dans tous les cas, la limite est un arbre de Kesten : une branche infinie et des arbres i.i.d. [\approx Kesten '86], [Janson '12], [Abraham & Delmas '14].

Extensions

- Généralisé à des arbres de Bienaymé-Galton-Watson.
- Dans tous les cas, la limite est un arbre de Kesten : une branche infinie et des arbres i.i.d. [\approx Kesten '86], [Janson '12], [Abraham & Delmas '14].
- La preuve repose sur l'indépendance entre différents sous-arbres de \mathcal{T}_n .
- Peut-on obtenir d'autres limites locales pour les arbres à descentes ?

Nos résultats

Théorème [T., Wagner '23+]

Soit $q \in (0, 1]$. Soit $\mathcal{T}_n^{(q)}$ l'arbre biaisé par les descentes à n sommets. Il existe un arbre infini $\mathcal{T}_*^{(q)}$ tel que, en loi :

$$\mathcal{T}_n^{(q)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loc)} \mathcal{T}_*^{(q)}.$$

Nos résultats

Théorème [T., Wagner '23+]

Soit $q \in (0, 1]$. Soit $\mathcal{T}_n^{(q)}$ l'arbre biaisé par les descentes à n sommets. Il existe un arbre infini $\mathcal{T}_*^{(q)}$ tel que, en loi :

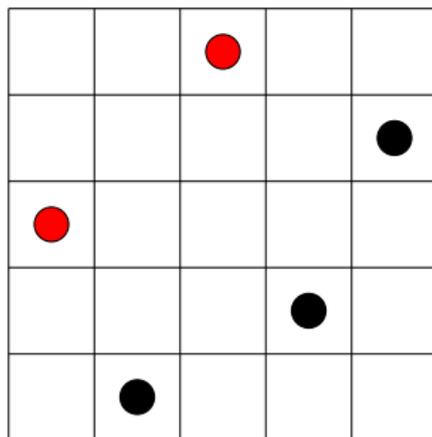
$$\mathcal{T}_n^{(q)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loc)} \mathcal{T}_*^{(q)}.$$

- Construction de $\mathcal{T}_*^{(q)}$ à partir de permutations biaisées par les descentes.

Permutations biaisées

- \mathfrak{S}_n ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$.
- $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ est une *descente* de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ si $\sigma(i) > \sigma(i + 1)$.
Soit $d(\sigma)$ le nombre de descentes de σ .

Exemple



$$\sigma = (31524) ; d(\sigma) = 2$$

Permutations biaisées

- Pour $q \in [0, +\infty]$, soit $S_n^{(q)} \in \mathfrak{S}_n$ la permutation aléatoire telle que

$$\mathbb{P} \left(S_n^{(q)} = \sigma \right) = \frac{1}{Z_n^{(q)}} q^{d(\sigma)},$$

$$\text{où } Z_n^{(q)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{d(\sigma)}.$$

Permutations biaisées

- Pour $q \in [0, +\infty]$, soit $S_n^{(q)} \in \mathfrak{S}_n$ la permutation aléatoire telle que

$$\mathbb{P} \left(S_n^{(q)} = \sigma \right) = \frac{1}{Z_n^{(q)}} q^{d(\sigma)},$$

où $Z_n^{(q)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{d(\sigma)}$.

- Par symétrie, on a $\left(S_n^{(1/q)}(k) \right)_{1 \leq k \leq n} \stackrel{(d)}{=} \left(n+1 - S_n^{(q)}(n+1-k) \right)_{1 \leq k \leq n}$, et on peut se restreindre à $q \in [0, 1]$.

Permutations biaisées

- Pour $q \in [0, +\infty]$, soit $S_n^{(q)} \in \mathfrak{S}_n$ la permutation aléatoire telle que

$$\mathbb{P} \left(S_n^{(q)} = \sigma \right) = \frac{1}{Z_n^{(q)}} q^{d(\sigma)},$$

où $Z_n^{(q)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{d(\sigma)}$.

- Par symétrie, on a $\left(S_n^{(1/q)}(k) \right)_{1 \leq k \leq n} \stackrel{(d)}{=} \left(n+1 - S_n^{(q)}(n+1-k) \right)_{1 \leq k \leq n}$, et on peut se restreindre à $q \in [0, 1]$.
- $S_n^{(0)} = Id$ p.s.
- $S_n^{(1)}$ est un élément uniforme de \mathfrak{S}_n .

Limite locale d'une permutation

Soit $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ une suite de permutations aléatoires, $\sigma_n \in \mathfrak{S}_n$.

On dit que σ_n a une limite locale $(X_i)_{i \geq 1}$ s'il existe des constantes $(c_n)_{n \geq 1}$ telles que, pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{1}{c_n} (\sigma_n(1), \dots, \sigma_n(k)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (X_1, \dots, X_k).$$

- Comportement des premiers éléments de σ_n .

Théorème [T., Wagner '23+]

Soit $q \in (0, 1]$. Il existe une chaîne de Markov $(X_i^{(q)})_{i \geq 1}$ telle que, pour tout $k \geq 1$:

$$\frac{1}{n} \left(S_n^{(q)}(1), \dots, S_n^{(q)}(k) \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \left(X_1^{(q)}, \dots, X_k^{(q)} \right).$$

Théorème [T., Wagner '23+]

Soit $q \in (0, 1]$. Il existe une chaîne de Markov $(X_i^{(q)})_{i \geq 1}$ telle que, pour tout $k \geq 1$:

$$\frac{1}{n} \left(S_n^{(q)}(1), \dots, S_n^{(q)}(k) \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \left(X_1^{(q)}, \dots, X_k^{(q)} \right).$$

- Pour $q = 1$, les $X_i^{(1)}$'s sont i.i.d. uniformes sur $[0, 1]$.
- $(X_1^{(q)}, \dots, X_k^{(q)})$ a une densité positive sur $[0, 1]^k$.

La chaîne de Markov limite

Pour $q \in (0, 1]$, on définit une chaîne de Markov $(X_i^{(q)})_{i \geq 1}$ comme suit.

- $X_1^{(q)}$ a densité $\frac{\log(1/q)}{1-q} q^x dx$;

La chaîne de Markov limite

Pour $q \in (0, 1]$, on définit une chaîne de Markov $(X_i^{(q)})_{i \geq 1}$ comme suit.

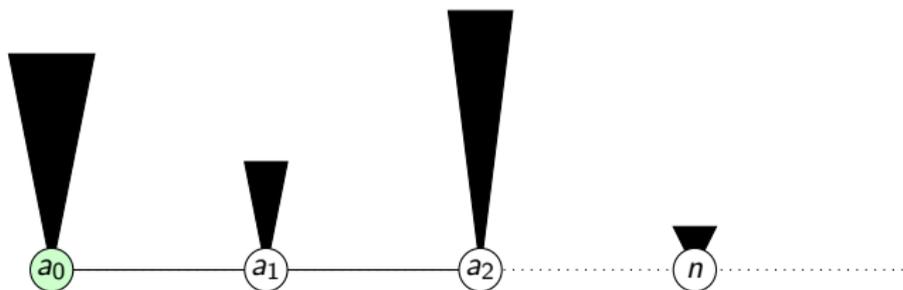
- $X_1^{(q)}$ a densité $\frac{\log(1/q)}{1-q} q^x dx$;
- $\forall j \geq 1$, $(X_{j+1}^{(q)} | X_j^{(q)})$ a une densité $\frac{\log(1/q)}{1-q} q^x \left(q \mathbb{1}_{x < X_j^{(q)}} + \mathbb{1}_{x > X_j^{(q)}} \right) dx$.

Construction de $\mathcal{T}_*^{(q)}$

- $\mathcal{T}_*^{(q)}$ est un arbre "Kesten-like" : une branche infinie, des arbres attachés dessus
- Les arbres attachés ne sont ni indépendants ni identiquement distribués. Plus touffu, petites étiquettes proches de la racine.

La lignée ancestrale de n dans $\mathcal{T}_n^{(q)}$

- Idée de la construction : regarder la lignée ancestrale de n . Soit h_n la hauteur de n .
- Soient $a_0, a_1, \dots, a_{h_n} =: n$ les étiquettes le long.



Théorème

Lemea [T., Wagner '23+]

Conditionnellement à h_n , (a_0, \dots, a_{h_n-1}) est distribuée comme une permutation q -biaisée de taille h_n .

Théorème

Lemea [T., Wagner '23+]

Conditionnellement à h_n , (a_0, \dots, a_{h_n-1}) est distribuée comme une permutation q -biaisée de taille h_n .

- Idée : si on se donne les arbres attachés, les intervertir a le même effet sur le nombre de descentes de \mathcal{T}_n qu'une permutation biaisée.
- Forcément, $a_{h_n-1} < n$.

Algorithme

- Cela nous donne un algorithme pour construire la lignée ancestrale de n conditionnellement à h_n .

⇐ on a seulement besoin d'étudier une forêt d'arbres biaisés.

Algorithme

- Cela nous donne un algorithme pour construire la lignée ancestrale de n conditionnellement à h_n .
- Etape 1 : on tire une forêt à n sommets, contenant $h_n + 1$ arbres q -biaisés, n étant la racine de l'un d'eux, avec étiquettes $[[1, n]]$.

⇐ on a seulement besoin d'étudier une forêt d'arbres biaisés.

Algorithme

- Cela nous donne un algorithme pour construire la lignée ancestrale de n conditionnellement à h_n .
- Etape 1 : on tire une forêt à n sommets, contenant $h_n + 1$ arbres q -biaisés, n étant la racine de l'un d'eux, avec étiquettes $[[1, n]]$.
- Etape 2 : trier les racines (sauf n) selon une permutation q -biaisée de leurs étiquettes, et on les relie pour former la lignée ancestrale de n .

⇐ on a seulement besoin d'étudier une forêt d'arbres biaisés.

Forêt q -biaisée**Lemme [T., Wagner '23+]**

Soit F une forêt. Soit N_k le nombre d'arbres de taille k dans F . Alors, pour tout $k \geq 1$, il existe $\pi_k > 0$ tel que

$$\frac{N_k}{h_n} \xrightarrow[n, h_n \rightarrow \infty]{(\mathbb{P})} \pi_k.$$

De plus, $\sum_{k \geq 1} \pi_k = 1$.

Forêt q -biaisée

Lemme [T., Wagner '23+]

Soit F une forêt. Soit N_k le nombre d'arbres de taille k dans F . Alors, pour tout $k \geq 1$, il existe $\pi_k > 0$ tel que

$$\frac{N_k}{h_n} \xrightarrow[n, h_n \rightarrow \infty]{(\mathbb{P})} \pi_k.$$

De plus, $\sum_{k \geq 1} \pi_k = 1$.

- Preuve : fonctions génératrices.
- On a de plus $h_n \gg n^{1/4}$ avec grande probabilité. Cette lignée ancestrale "converge localement" vers une branche infinie.

- En particulier, pour tout k , avec probabilité positive, l'arbre attaché à la racine de \mathcal{T}_n a taille $k < \infty$.
- Finalement, conditionnellement à k , cet arbre est un arbre q -biaisé de taille k .

- En particulier, pour tout k , avec probabilité positive, l'arbre attaché à la racine de \mathcal{T}_n a taille $k < \infty$.
- Finalement, conditionnellement à k , cet arbre est un arbre q -biaisé de taille k .
- Puisque les grands arbres ont typiquement une racine de petite étiquette, il est probable que l'arbre attaché à la racine ait une taille plus grande que le deuxième.

- En particulier, pour tout k , avec probabilité positive, l'arbre attaché à la racine de \mathcal{T}_n a taille $k < \infty$.
- Finalement, conditionnellement à k , cet arbre est un arbre q -biaisé de taille k .
- Puisque les grands arbres ont typiquement une racine de petite étiquette, il est probable que l'arbre attaché à la racine ait une taille plus grande que le deuxième.
- Distribution de $B_r \left(\mathcal{T}_*^{(q)} \right)$: laide, mais explicite.