Ensembles de coupure, percolation et marche aléatoire

Franco Severo

Institut Camille Jordan

Basé sur un travail en commun avec Philip Easo and Vincent Tassion

Rouen

20 Juin, 2025

Soit $G = (V, E)$ un graphe infini, connexe et localement fini.

Percolation

Soit $G = (V, E)$ un graphe infini, connexe et localement fini.

Percolation : Pour $p \in [0, 1]$, soit $\mathbf{P}_p$ la loi du sous-graphe aléatoire $G_p \subset G$ obtenu en supprimant chaque arête indépendamment avec probabilité $1 - p$.

Percolation

Soit $G = (V, E)$ un graphe infini, connexe et localement fini.

Percolation : Pour $p \in [0, 1]$, soit $\mathbf{P}_p$ la loi du sous-graphe aléatoire $G_p \subset G$ obtenu en supprimant chaque arête indépendamment avec probabilité $1 - p$.

Le point critique :

$$p_c(G) := \inf\{p \in [0, 1] : \ \mathbf{P}_p[x \leftrightarrow \infty] > 0\}.$$

Percolation

Soit $G = (V, E)$ un graphe infini, connexe et localement fini.

Percolation : Pour $p \in [0, 1]$, soit $\mathbf{P}_p$ la loi du sous-graphe aléatoire $G_p \subset G$ obtenu en supprimant chaque arête indépendamment avec probabilité $1 - p$.

Le point critique uniforme :

$$p_c^*(G) := \inf\{p \in [0,1] : \inf_{x \in V} \mathbf{P}_p[x \leftrightarrow \infty] > 0\}.$$

Percolation

Soit $G = (V, E)$ un graphe infini, connexe et localement fini.

Percolation : Pour $p \in [0, 1]$, soit $\mathbf{P}_p$ la loi du sous-graphe aléatoire $G_p \subset G$ obtenu en supprimant chaque arête indépendamment avec probabilité $1 - p$.

Le point critique uniforme :

$$p_c^*(G) := \inf\{p \in [0, 1] : \inf_{x \in V} \mathbf{P}_p[x \leftrightarrow \infty] > 0\}.$$

Rmq : *Si* $\Delta := \sup_{x \in V} \deg(x)$*, alors* $p_c(G) \geq 1/(\Delta - 1)$. *(comptage de chemins)*

Percolation

Soit $G = (V, E)$ un graphe infini, connexe et localement fini.

Percolation : Pour $p \in [0, 1]$, soit $\mathbf{P}_p$ la loi du sous-graphe aléatoire $G_p \subset G$ obtenu en supprimant chaque arête indépendamment avec probabilité $1 - p$.

Le point critique uniforme :

$$p_c^*(G) := \inf\{p \in [0, 1] : \inf_{x \in V} \mathbf{P}_p[x \leftrightarrow \infty] > 0\}.$$

Rmq : *Si* $\Delta := \sup_{x \in V} \deg(x)$, *alors* $p_c(G) \geq 1/(\Delta - 1)$. *(comptage de chemins)*

Question

Pour quels graphes G avons-nous $p_c(G) < 1$?

Ensembles de coupure

Ensemble de coupure : $\Pi \subset E$ est un *ensemble de coupure de x à ∞* si x appartient à une composante connexe finie de $(V, E \setminus \Pi)$.

Ensembles de coupure

Ensemble de coupure : $\Pi \subset E$ est un *ensemble de coupure de x à ∞* si x appartient à une composante connexe finie de $(V, E \setminus \Pi)$. Un ensemble de coupure Π est ***minimal*** si ($\forall\ \Pi' \subsetneq \Pi,\ \Pi'$ n'est pas un ensemble de coupure).

Ensembles de coupure

Ensemble de coupure : $\Pi \subset E$ est un *ensemble de coupure de x à ∞* si x appartient à une composante connexe finie de $(V, E \setminus \Pi)$. Un ensemble de coupure Π est *minimal* si $(\forall\ \Pi' \subsetneq \Pi,\ \Pi'$ n'est pas un ensemble de coupure$)$.

$$Q_n(x) := \left\{ \begin{array}{c} \Pi \subset E : \ \Pi \text{ est un } \textit{ensemble de coupure} \\ \textit{minimal} \text{ de } x \text{ à } \infty \text{ et } |\Pi| = n \end{array} \right\},$$

Ensemble de coupure : $\Pi \subset E$ est un *ensemble de coupure de x à ∞* si x appartient à une composante connexe finie de $(V, E \setminus \Pi)$. Un ensemble de coupure Π est *minimal* si ($\forall\ \Pi' \subsetneq \Pi$, Π' n'est pas un ensemble de coupure).

$$Q_n(x) := \left\{ \begin{array}{c} \Pi \subset E : \ \Pi \text{ est un } \textit{ensemble de coupure} \\ \textit{minimal} \text{ de } x \text{ à } \infty \text{ et } |\Pi| = n \end{array} \right\},$$

$$q_n := \sup_{x \in V} |Q_n(x)|,$$

$$\kappa(G) := \sup_{n \geq 1} q_n^{1/n}.$$

Ensembles de coupure

Ensemble de coupure : $\Pi \subset E$ est un <u>*ensemble de coupure*</u> *de x à ∞* si x appartient à une composante connexe finie de $(V, E \setminus \Pi)$. Un ensemble de coupure Π est <u>*minimal*</u> si $(\forall\ \Pi' \subsetneq \Pi,\ \Pi'$ n'est pas un ensemble de coupure).

$$Q_n(x) := \left\{ \begin{array}{c} \Pi \subset E : \ \Pi \text{ est un } \textit{ensemble de coupure} \\ \textit{minimal} \text{ de } x \text{ à } \infty \text{ et } |\Pi| = n \end{array} \right\},$$

$$q_n := \sup_{x \in V} |Q_n(x)|,$$

$$\kappa(G) := \sup_{n \geq 1} q_n^{1/n}.$$

Rmq : *Si G a une croissance linéaire (c'est-à-dire que $|B(x,n)| \leq Cn$), alors $\exists k$ tel que $|Q_k(x)| = \infty$. En particulier, $\kappa(G) = \infty$ et $p_c(G) = 1$.*

Ensembles de coupure

Ensemble de coupure : $\Pi \subset E$ est un <u>*ensemble de coupure*</u> *de* x *à* ∞ si x appartient à une composante connexe finie de $(V, E \setminus \Pi)$. Un ensemble de coupure Π est <u>*minimal*</u> si ($\forall\ \Pi' \subsetneq \Pi,\ \Pi'$ n'est pas un ensemble de coupure).

$$Q_n(x) := \left\{ \begin{array}{c} \Pi \subset E : \ \Pi \text{ est un } \textit{ensemble de coupure} \\ \textit{minimal} \text{ de } x \text{ à } \infty \text{ et } |\Pi| = n \end{array} \right\},$$

$$q_n := \sup_{x \in V} |Q_n(x)|,$$

$$\kappa(G) := \sup_{n \geq 1} q_n^{1/n}.$$

Rmq : *Si G a une croissance linéaire (c'est-à-dire que $|B(x,n)| \leq Cn$), alors $\exists k$ tel que $|Q_k(x)| = \infty$. En particulier, $\kappa(G) = \infty$ et $p_c(G) = 1$.*

Théorème (Peierls'36)

Si $\kappa(G) < \infty$, alors $p_c^*(G) < 1$.

Ensembles de coupure

Ensemble de coupure : $\Pi \subset E$ est un *ensemble de coupure de x à ∞* si x appartient à une composante connexe finie de $(V, E \setminus \Pi)$. Un ensemble de coupure Π est *minimal* si $(\forall\ \Pi' \subsetneq \Pi,\ \Pi'$ n'est pas un ensemble de coupure$)$.

$$Q_n(x) := \left\{ \begin{array}{c} \Pi \subset E : \ \Pi \text{ est un } \textit{ensemble de coupure} \\ \textit{minimal} \text{ de } x \text{ à } \infty \text{ et } |\Pi| = n \end{array} \right\},$$

$$q_n := \sup_{x \in V} |Q_n(x)|,$$

$$\kappa(G) := \sup_{n \geq 1} q_n^{1/n}.$$

Rmq : *Si G a une croissance linéaire (c'est-à-dire que $|B(x,n)| \leq Cn$), alors $\exists k$ tel que $|Q_k(x)| = \infty$. En particulier, $\kappa(G) = \infty$ et $p_c(G) = 1$.*

Théorème (Peierls'36)

Si $\kappa(G) < \infty$, alors $p_c^*(G) < 1$.

Rmq : $\kappa(G) < \infty$ *implique "percolation forte" pour* $p > 1 - 1/\kappa(G)$.

On dit que G est **transitif** s'il est "identique vu de n'importe quel sommet",

i.e. $\forall\, x, y \in V,\ \exists \gamma \in \mathrm{Aut}(G)$ tel que $\gamma(x) = y$.

Conjectures sur les graphes transitifs

On dit que G est **transitif** s'il est "identique vu de n'importe quel sommet",

i.e. $\forall\ x, y \in V,\ \exists \gamma \in \mathrm{Aut}(G)$ tel que $\gamma(x) = y$.

Conjecture 1 (Benjamini, Schramm'96)

Si un graphe *transitif* G a une croissance *superlinéaire*, alors $p_c(G) < 1$.

Conjectures sur les graphes transitifs

On dit que G est **transitif** s'il est "identique vu de n'importe quel sommet", i.e. $\forall\, x, y \in V,\ \exists \gamma \in \mathrm{Aut}(G)$ tel que $\gamma(x) = y$.

Conjecture 1 (Benjamini, Schramm'96)

Si un graphe *transitif* G a une croissance *superlinéaire*, alors $p_c(G) < 1$.

$\longrightarrow$ Démontré dans [Duminil-Copin, Goswami, Raoufi, S., Yadin'20], en comparant la percolation indépendante avec les ensembles de niveau du *champ libre gaussien* sur G.

Conjectures sur les graphes transitifs

On dit que G est **transitif** s'il est "identique vu de n'importe quel sommet", i.e. $\forall\ x, y \in V,\ \exists\gamma \in \mathrm{Aut}(G)$ tel que $\gamma(x) = y$.

Conjecture 1 (Benjamini, Schramm'96)

Si un graphe *transitif* G a une croissance *superlinéaire*, alors $p_c(G) < 1$.

$\longrightarrow$ Démontré dans [Duminil-Copin, Goswami, Raoufi, S., Yadin'20], en comparant la percolation indépendante avec les ensembles de niveau du *champ libre gaussien* sur G.

Conjecture 2 (Babson, Benjamini'99)

Si un graphe *transitif* G a une croissance *superlinéaire*, alors $\kappa(G) < \infty$.

Conjectures sur les graphes transitifs

On dit que G est **transitif** s'il est "identique vu de n'importe quel sommet", i.e. $\forall\ x, y \in V,\ \exists \gamma \in \mathrm{Aut}(G)$ tel que $\gamma(x) = y$.

Conjecture 1 (Benjamini, Schramm'96)

Si un graphe *transitif* G a une croissance *superlinéaire*, alors $p_c(G) < 1$.

$\longrightarrow$ Démontré dans [Duminil-Copin, Goswami, Raoufi, S., Yadin'20], en comparant la percolation indépendante avec les ensembles de niveau du *champ libre gaussien* sur G.

Conjecture 2 (Babson, Benjamini'99)

Si un graphe *transitif* G a une croissance *superlinéaire*, alors $\kappa(G) < \infty$.

Rmq : *Le résultat principal de [Babson, Benjamini'99] dit que si G est un graphe de Cayley d'un groupe finiment présenté et à un seul bout, alors chaque coupe minimale dans G est "presque connexe", ce qui implique que $\kappa(G) < \infty$.*

Main results

Théorème 1 (Easo, S., Tassion'24)

Si $p_c^*(G) < 1$, alors $\kappa(G) < \infty$. *(Réciproque de l'argument de Peierls)*

Main results

Théorème 1 (Easo, S., Tassion'24)

Si $p_c^*(G) < 1$, alors $\kappa(G) < \infty$. *(Réciproque de l'argument de Peierls)*

$\longrightarrow$ Avec [DGRSY'20], cela implique la Conjecture 2.

Main results

Théorème 1 (Easo, S., Tassion'24)

Si $p_c^*(G) < 1$, alors $\kappa(G) < \infty$. *(Réciproque de l'argument de Peierls)*

$\longrightarrow$ Avec [DGRSY'20], cela implique la Conjecture 2.

Transience uniforme : Considérons la conductance minimale entre un point et l'infini :

$$c_\infty(G) := \inf_{x \in V} \deg(x) \mathbf{P}_x[X_t \neq x \ \forall t \geq 1].$$

Main results

Théorème 1 (Easo, S., Tassion'24)

Si $p_c^*(G) < 1$, alors $\kappa(G) < \infty$. *(Réciproque de l'argument de Peierls)*

$\longrightarrow$ Avec [DGRSY'20], cela implique la Conjecture 2.

Transience uniforme : Considérons la conductance minimale entre un point et l'infini :

$$c_\infty(G) := \inf_{x \in V} \deg(x) \mathbf{P}_x[X_t \neq x \ \forall t \geq 1].$$

Théorème 2 (Easo, S., Tassion'24)

Si $c_\infty(G) > 0$, alors $\kappa(G) < \infty$.

Théorème 1 (Easo, S., Tassion'24)

Si $p_c^*(G) < 1$, alors $\kappa(G) < \infty$. *(Réciproque de l'argument de Peierls)*

$\longrightarrow$ Avec [DGRSY'20], cela implique la Conjecture 2.

Transience uniforme : Considérons la conductance minimale entre un point et l'infini :

$$c_\infty(G) := \inf_{x \in V} \deg(x) \mathbf{P}_x[X_t \neq x \ \forall t \geq 1].$$

Théorème 2 (Easo, S., Tassion'24)

Si $c_\infty(G) > 0$, alors $\kappa(G) < \infty$.

$\longrightarrow$ Cela fournit une nouvelle preuve de la Conjecture 1.

(Plus simple que [DGRSY'20] !)

Inégalités isopérimétriques

Inégalités isopérimétriques : On dit que G satisfait une inégalité isopérimétrique de dimension $d > 1$ si

$$|\partial K| \geq c|K|^{\frac{d-1}{d}} \quad \text{pour tout} \quad K \subset V \text{ fini.} \tag{I_d}$$

Inégalités isopérimétriques

Inégalités isopérimétriques : On dit que G satisfait une inégalité isopérimétrique de dimension $d > 1$ si

$$|\partial K| \geq c|K|^{\frac{d-1}{d}} \quad \text{pour tout} \quad K \subset V \text{ fini.} \qquad (\mathrm{I}_d)$$

Question (Benjamini-Schramm'96)

Est-ce que, pour tout $d > 1$, l'inégalité (I_d) implique que $p_c^*(G) < 1$?

Inégalités isopérimétriques

Inégalités isopérimétriques : On dit que G satisfait une inégalité isopérimétrique de dimension $d > 1$ si

$$|\partial K| \geq c|K|^{\frac{d-1}{d}} \quad \text{pour tout} \quad K \subset V \text{ fini.} \qquad (\mathrm{I}_d)$$

Question (Benjamini-Schramm'96)

Est-ce que, pour tout $d > 1$, l'inégalité (I_d) implique que $p_c^*(G) < 1$?

Notre Théorème 2 implique une réponse partielle à cette question :

Corolaire (Easo, S., Tassion'24)

Si G satisfait (I_d) pour un certain $d > 2$, alors $\kappa(G) < \infty$ (donc $p_c^*(G) < 1$).

Inégalités isopérimétriques : On dit que G satisfait une inégalité isopérimétrique de dimension $d > 1$ si

$$|\partial K| \geq c|K|^{\frac{d-1}{d}} \quad \text{pour tout} \quad K \subset V \text{ fini.} \qquad (\mathrm{I}_d)$$

Question (Benjamini-Schramm'96)

Est-ce que, pour tout $d > 1$, l'inégalité (I_d) implique que $p_c^*(G) < 1$?

Notre Théorème 2 implique une réponse partielle à cette question :

Corolaire (Easo, S., Tassion'24)

Si G satisfait (I_d) pour un certain $d > 2$, alors $\kappa(G) < \infty$ (donc $p_c^*(G) < 1$).

Rmq : *Dans [DGRSY'20], il a été prouvé que si G satisfait (I_d) pour $d > 4$ (et a des degrés bornés), alors $\overline{p_c}(G) < 1$.*

Stratégie de preuve

Idée : Construire un ensemble de coupure minimal *aléatoire* $\mathcal{P}$ de x à ∞ t.q.

$$\mathbf{P}[\mathcal{P} = \Pi] \geq c^n \quad \forall\, \Pi \in Q_n(x).$$

Stratégie de preuve

Idée : Construire un ensemble de coupure minimal *aléatoire* $\mathcal{P}$ de x à ∞ t.q.

$$\mathbf{P}[\mathcal{P} = \Pi] \geq c^n \quad \forall\, \Pi \in Q_n(x).$$

Proposition 1

Supposons que $\inf_{x \in V} \mathbb{P}_p[x \leftrightarrow \infty] \geq \theta > 0$, pour $p < 1$. Il existe $c(p, \theta) > 0$ tel que

$$\mathbb{P}_p[\partial_\infty \mathcal{C}_x = \Pi] \geq c(\theta, p)^n \qquad \forall n \geq 1,\ \forall\, \Pi \in Q_n(x),$$

où $\partial_\infty \mathcal{C}_x$ est le bord exposé de $\mathcal{C}_x$, la composante connexe (cluster) de x.

Proposition 1 $\implies$ Théorème 1.

Stratégie de preuve

Idée : Construire un ensemble de coupure minimal *aléatoire* $\mathcal{P}$ de x à ∞ t.q.

$$\mathbf{P}[\mathcal{P} = \Pi] \geq c^n \quad \forall\, \Pi \in Q_n(x).$$

Proposition 1

Supposons que $\inf_{x \in V} \mathbb{P}_p[x \leftrightarrow \infty] \geq \theta > 0$, pour $p < 1$. Il existe $c(p, \theta) > 0$ tel que

$$\mathbb{P}_p[\partial_\infty \mathcal{C}_x = \Pi] \geq c(\theta, p)^n \qquad \forall n \geq 1,\ \forall\, \Pi \in Q_n(x),$$

où $\partial_\infty \mathcal{C}_x$ est le bord exposé de $\mathcal{C}_x$, la composante connexe (cluster) de x.

Proposition 1 $\implies$ Théorème 1.

Proposition 2

Supposons que $\inf_{x \in V} \deg(x) \mathbf{P}_x[X_t \neq x\ \forall t \geq 1] \geq \theta > 0$. Il existe $c(\theta) > 0$ tel que

$$\mathbf{P}_x[\partial_\infty X_{[0,\tau]} = \Pi] \geq c(\theta)^n \qquad \forall n \geq 1,\ \forall\, \Pi \in Q_n(x),$$

où $X_{[0,\tau]} := \{X_0, \ldots, X_\tau\}$ et $\tau := \sup\{t \geq 0 :\ X_t = X_0\}$.

Proposition 2 $\implies$ Théorème 2.

Preuve de la Proposition 1

Proposition 1

Si $\inf_{x \in V} \mathbb{P}_p[x \leftrightarrow \infty] \geq \theta > 0$, alors $\mathbb{P}_p[\partial_\infty \mathcal{C}_x = \Pi] \geq c(\theta, p)^n \quad \forall\, \Pi \in Q_n(x)$.

Preuve de la Proposition 1

Proposition 1

Si $\inf_{x\in V} \mathbb{P}_p[x \leftrightarrow \infty] \geq \theta > 0$, alors $\mathbb{P}_p[\partial_\infty \mathcal{C}_x = \Pi] \geq c(\theta, p)^n \quad \forall\, \Pi \in Q_n(x)$.

Preuve : Soit $\Pi = \{e_1, \ldots, e_n\} \in Q_n(x)$, $H = (U, F)$ la composante connexe de x dans $(V, E \setminus \Pi)$, et $e_i = \{a_i, b_i\}$ avec $a_i \in U$ (et $b_i \notin U$). Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_p[\partial_\infty \mathcal{C}_x = \Pi] &= \mathbb{P}_p\Big[\bigcap_{i\leq n}\{e_i \text{ fermées}\} \cap \{x \overset{H}{\longleftrightarrow} a_i\}\Big] \\ &= (1-p)^n\, \mathbb{P}_p\Big[\bigcap_{i\leq n}\{x \overset{H}{\longleftrightarrow} a_i\}\Big].\end{aligned}$$

Preuve de la Proposition 1

Proposition 1

Si $\inf_{x \in V} \mathbb{P}_p[x \leftrightarrow \infty] \geq \theta > 0$, alors $\mathbb{P}_p[\partial_\infty \mathcal{C}_x = \Pi] \geq c(\theta, p)^n \quad \forall\, \Pi \in Q_n(x)$.

Preuve : Soit $\Pi = \{e_1, \ldots, e_n\} \in Q_n(x)$, $H = (U, F)$ la composante connexe de x dans $(V, E \setminus \Pi)$, et $e_i = \{a_i, b_i\}$ avec $a_i \in U$ (et $b_i \notin U$). Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_p[\partial_\infty \mathcal{C}_x = \Pi] &= \mathbb{P}_p\Big[\bigcap_{i \leq n} \{e_i \text{ fermées}\} \cap \{x \overset{H}{\leftrightarrow} a_i\}\Big] \\ &= (1-p)^n\, \mathbb{P}_p\Big[\bigcap_{i \leq n} \{x \overset{H}{\leftrightarrow} a_i\}\Big].\end{aligned}$$

Lemme 1

Soit $H = (U, F)$ un graphe fini connexe, et $A \subset U$. Soit P une percolation FKG telle que $P[u \leftrightarrow A] \geq \theta \quad \forall u \in U$ et $P[f \text{ open}] \geq p \quad \forall f \in F$. Alors $\exists c(\theta, p) > 0$ tel que $\forall x \in U$,

$$P\Big[\bigcap_{a \in A} \{x \leftrightarrow a\}\Big] \geq c^{|A|}.$$

Preuve de la Proposition 2

Proposition 2

Si $\inf_{x \in V} \deg(x) \mathbf{P}_x[X_t \neq x \ \forall t \geq 1] \geq \theta > 0$, alors

$$\mathbf{P}_x[\partial_\infty X_{[0,\tau]} = \Pi] \geq c(\theta)^n \quad \forall \ \Pi \in Q_n(x).$$

(Rappelons que $\tau := \sup\{t \geq 0 : \ X_t = X_0\}$.)

Preuve de la Proposition 2

Proposition 2

Si $\inf_{x \in V} \deg(x) \mathbf{P}_x[X_t \neq x \ \forall t \geq 1] \geq \theta > 0$, alors

$$\mathbf{P}_x[\partial_\infty X_{[0,\tau]} = \Pi] \geq c(\theta)^n \quad \forall \, \Pi \in Q_n(x).$$

(Rappelons que $\tau := \sup\{t \geq 0 : \ X_t = X_0\}$.)

Preuve : Soit $\Pi = \{e_1, \ldots, e_n\} \in Q_n(x)$, $H = (U, F)$ la composante connexe de x dans $(V, E \setminus \Pi)$, et $e_i = \{a_i, b_i\}$ avec $a_i \in U$ (et $b_i \notin U$). Alors

$$\mathbf{P}_x[\partial_\infty X_{[0,\tau]} = \Pi] \simeq \theta \, \mathbf{P}_x[A \subset X_{[0,H_B]}].$$

Preuve de la Proposition 2

Proposition 2

Si $\inf_{x\in V} \deg(x)\mathbf{P}_x[X_t \neq x\ \forall t \geq 1] \geq \theta > 0$, alors

$$\mathbf{P}_x[\partial_\infty X_{[0,\tau]} = \Pi] \geq c(\theta)^n \quad \forall\ \Pi \in Q_n(x).$$

(Rappelons que $\tau := \sup\{t \geq 0 :\ X_t = X_0\}$.)

Preuve : Soit $\Pi = \{e_1, \ldots, e_n\} \in Q_n(x)$, $H = (U, F)$ la composante connexe de x dans $(V, E \setminus \Pi)$, et $e_i = \{a_i, b_i\}$ avec $a_i \in U$ (et $b_i \notin U$). Alors

$$\mathbf{P}_x[\partial_\infty X_{[0,\tau]} = \Pi] \simeq \theta\, \mathbf{P}_x[A \subset X_{[0,H_B]}].$$

Pour $i, j \leq n$, soit $\mathbf{p}(i,j) = \mathbf{P}_{a_i}[X_1 \in U, X_{H_A^+} = a_j]$. On peut prouver que

$$\sum_{i\in S, j\in S^c} \mathbf{p}(i,j) \geq c_1(\theta) > 0 \quad \forall\ \emptyset \neq S \subsetneq \{1, \ldots, n\}. \qquad (\star)$$

Preuve de la Proposition 2

Proposition 2

Si $\inf_{x \in V} \deg(x) \mathbf{P}_x[X_t \neq x \ \forall t \geq 1] \geq \theta > 0$, alors

$$\mathbf{P}_x[\partial_\infty X_{[0,\tau]} = \Pi] \geq c(\theta)^n \quad \forall \, \Pi \in Q_n(x).$$

(Rappelons que $\tau := \sup\{t \geq 0 : \ X_t = X_0\}$.)

Preuve : Soit $\Pi = \{e_1, \dots, e_n\} \in Q_n(x)$, $H = (U, F)$ la composante connexe de x dans $(V, E \setminus \Pi)$, et $e_i = \{a_i, b_i\}$ avec $a_i \in U$ (et $b_i \notin U$). Alors

$$\mathbf{P}_x[\partial_\infty X_{[0,\tau]} = \Pi] \simeq \theta \, \mathbf{P}_x[A \subset X_{[0,H_B]}].$$

Pour $i, j \leq n$, soit $\mathbf{p}(i,j) = \mathbf{P}_{a_i}[X_1 \in U, X_{H_A^+} = a_j]$. On peut prouver que

$$\sum_{i \in S, j \in S^c} \mathbf{p}(i,j) \geq c_1(\theta) > 0 \quad \forall \, \emptyset \neq S \subsetneq \{1, \dots, n\}. \qquad (\star)$$

Lemme 2

L'inégalité $(\star)$ implique $P_{K_n}^{RW(\mathbf{p})}[\tau_{cov} < \infty] \geq c_2^n$.

Merci de votre attention !