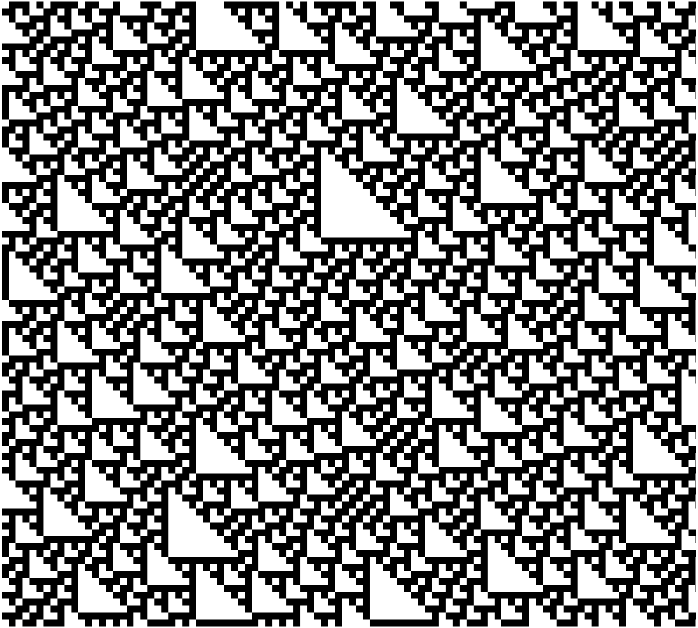
Randomisation dans les automates cellulaires

Benjamin Hellouin de Menibus, Ville Salo, Guillaume Theyssier

Université Paris-Saclay

Journées RMR 2025

Pavage de Ledrappier



$$G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$$

$$\sum \begin{smallmatrix} \square & \\ \square & \square \end{smallmatrix} = 0$$

Pavage de Ledrappier

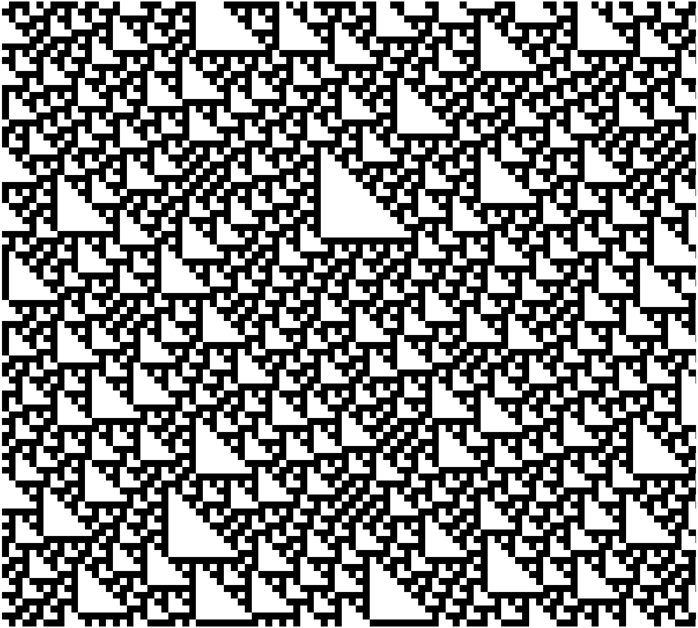
$G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$

$$\sum \begin{array}{cc} \boxed{} & \\ \boxed{} & \boxed{} \end{array} = 0$$

Courbe:

- libre
- génératrice
- tirée uniformément

Pavage de Ledrappier



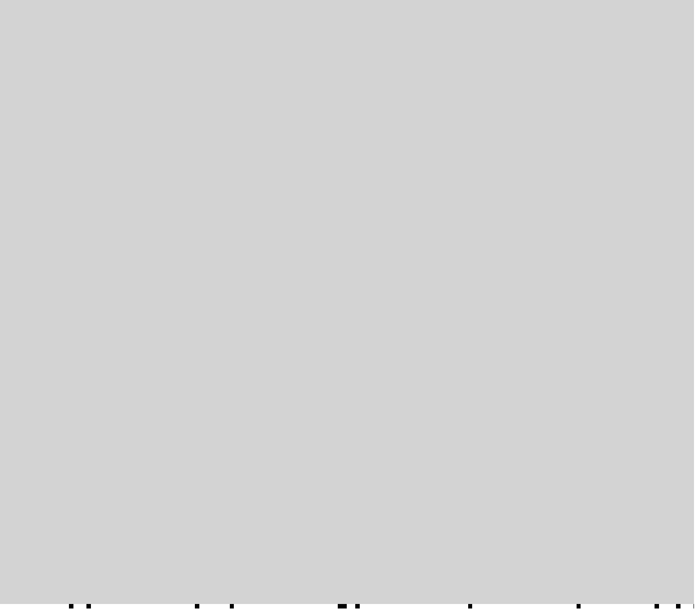
$G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$

$$\sum \begin{matrix} \square & \\ \square & \square \end{matrix} = 0$$

Courbe:

- libre
- génératrice
- tirée uniformément

Si F surjectif,
$F\lambda = \lambda$
(mes. uniforme)



$G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$

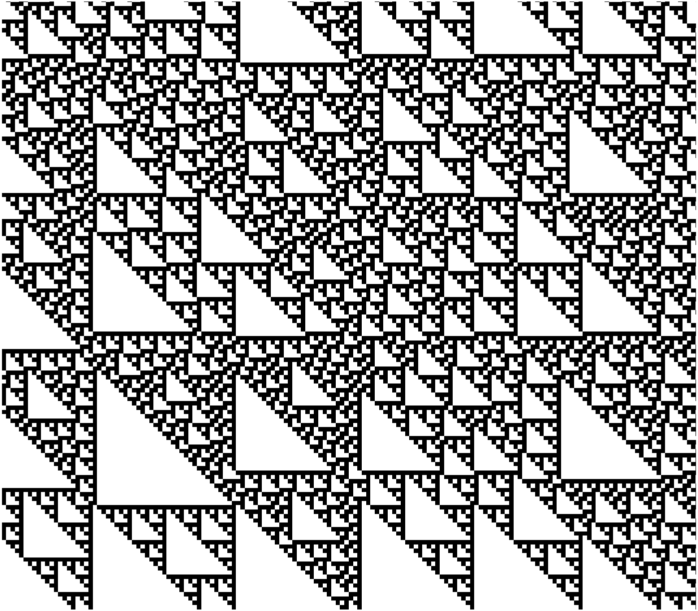
$$\sum \begin{matrix} \square & \\ \square & \square \end{matrix} = 0$$

Courbe:

- libre
- génératrice
- tirée uniformément

Miyamoto 79,
Lind 84:
$\frac{1}{T} \sum F^t \mu \to \lambda$

Pavage de Ledrappier



$G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$

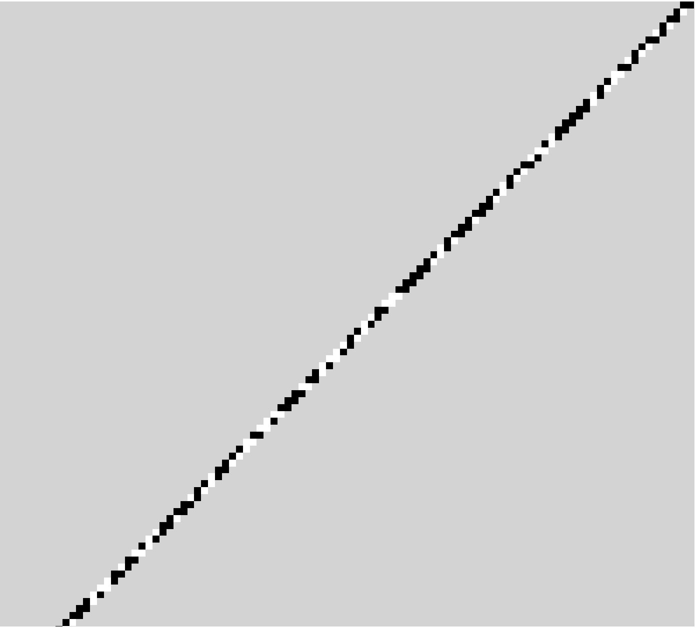
$$\sum \begin{matrix} \square & \\ \square & \square \end{matrix} = 0$$

Courbe:

- libre
- génératrice
- tirée uniformément

Miyamoto 79, Lind 84: $\frac{1}{T}\sum F^t\mu \to \lambda$

Pavage de Ledrappier

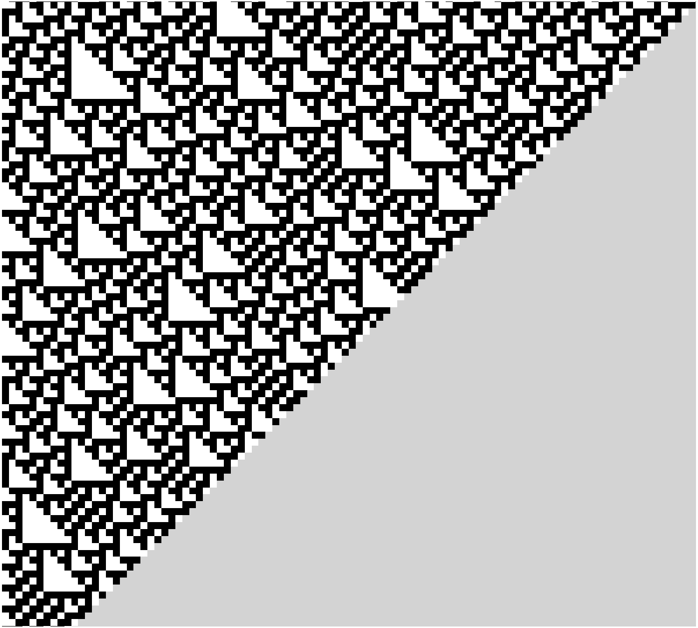


$G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$

$$\sum \begin{array}{cc} \square & \\ \square & \square \end{array} = 0$$

Courbe:

- libre
- génératrice
- i.i.d uniforme



$G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$

$$\sum \begin{array}{cc} \square & \\ \square & \square \end{array} = 0$$

Courbe:

- libre
- génératrice
- i.i.d uniforme

Pavage de Ledrappier

$G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$

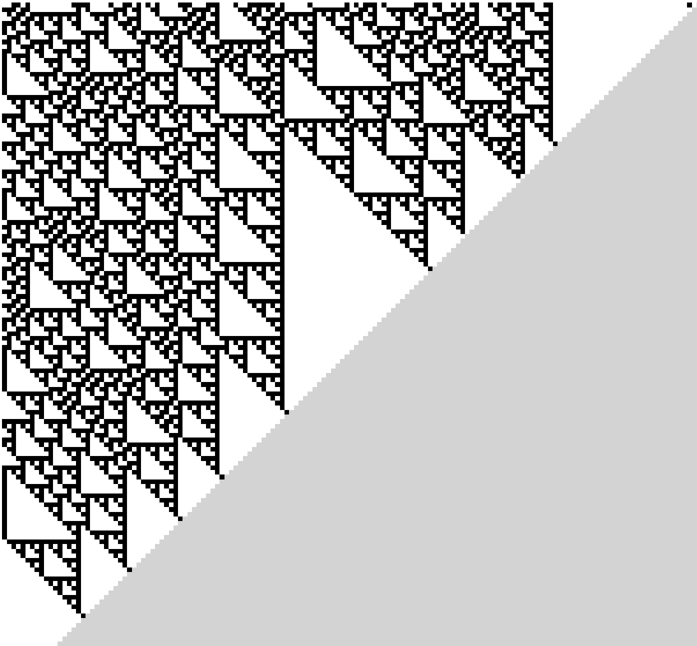
$$\sum \begin{array}{cc} \square & \\ \square & \square \end{array} = 0$$

Courbe:

- libre
- génératrice
- i.i.d non uniforme

H., Salo, Theyssier 17: $F^t\mu \to \lambda$

Pavage de Ledrappier



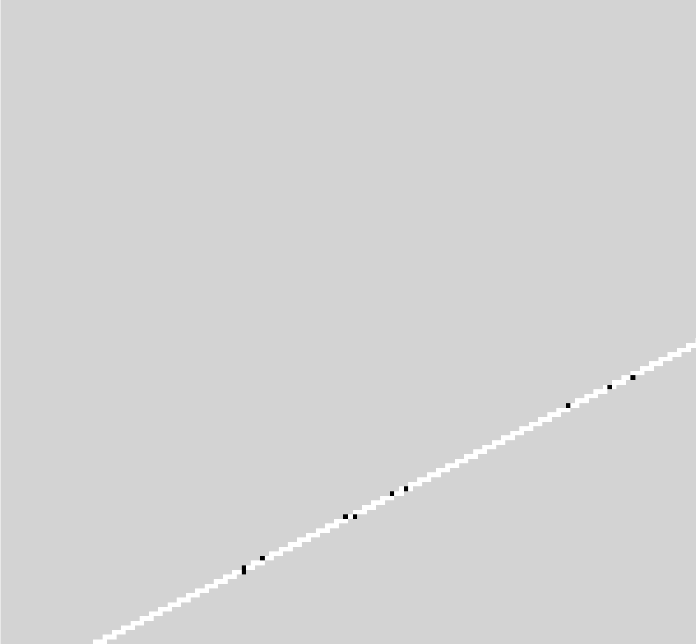
$G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$

$\sum \begin{array}{ll} \square & \\ \square & \square \end{array} = 0$

Courbe:

- libre
- génératrice
- i.i.d non uniforme

Pavage de Ledrappier



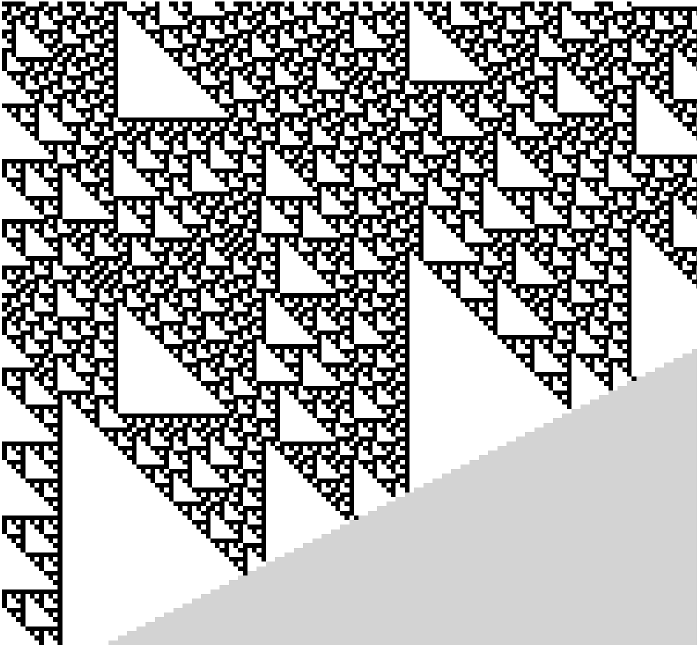
$G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$

$$\sum \begin{array}{ll} \square & \\ \square & \square \end{array} = 0$$

Courbe:

- libre
- génératrice
- i.i.d non uniforme

Pavage de Ledrappier



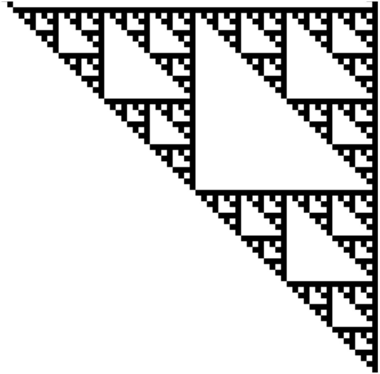
$$G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$$

$$\sum \begin{smallmatrix}\square & \\ \square & \square\end{smallmatrix} = 0$$

Courbe:

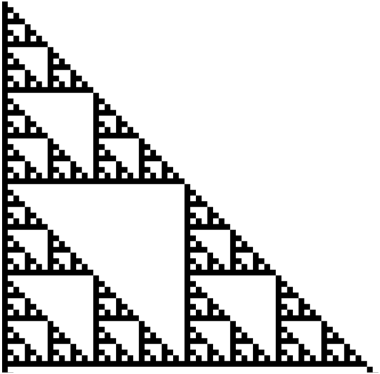
- libre
- génératrice
- i.i.d non uniforme

Randomisation en moyenne de Cesàro



$$\sum \frac{\square}{\square\,\square} = 0$$

Randomisation en moyenne de Cesàro



Fonction de dépendance
($\square = 0, \blacksquare = Id$)

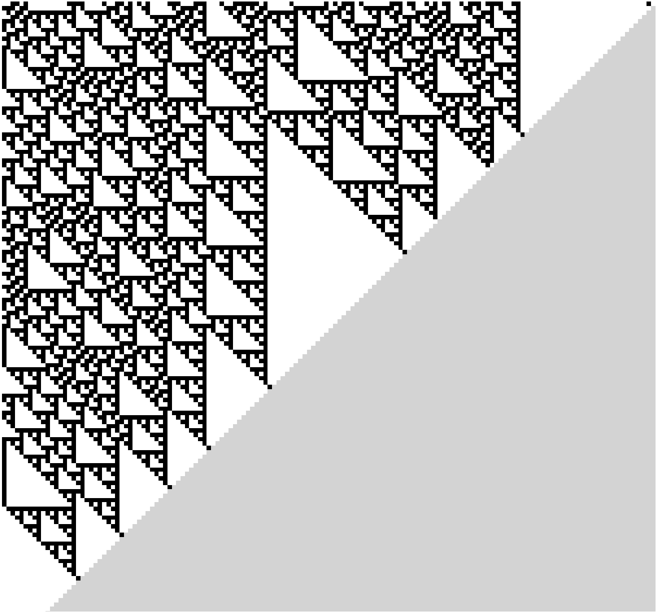
$$\sum \begin{matrix} \square & \\ \square & \square \end{matrix} = 0$$

- $F^{2^n}(x)_0 = x_0 + x_{2^n}$
- pour un t “typique”,

$$F^t(x)_0 = \underset{\to\infty}{\underleftrightarrow{x_{i_0} + x_{i_1} + \cdots + x_{i_n}}}$$

Marche aléatoire sur groupe fini, proba invariante $(1/2, 1/2)$.

Randomisation directe



$G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$

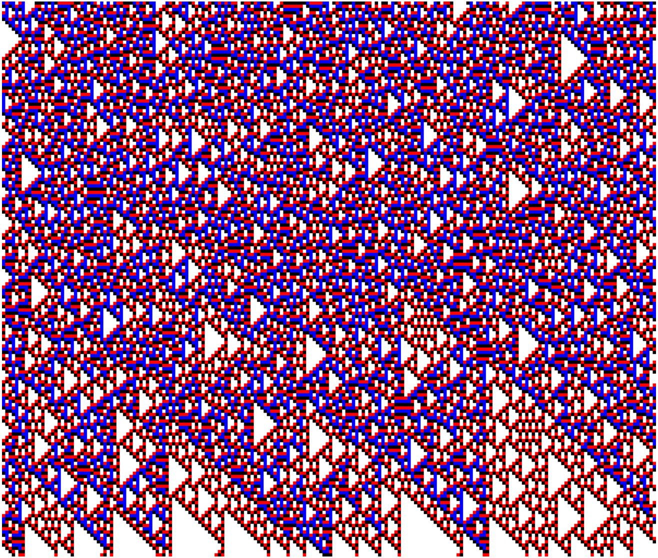
$$\sum \begin{array}{cc} \square & \\ \square & \square \end{array} = 0$$

Courbe:

- libre
- génératrice
- i.i.d non uniforme

H., Salo, Theyssier 17: $F^t\mu \to \lambda$

Randomisation directe



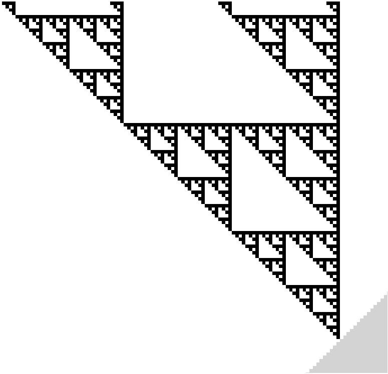
$$G = ((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2, +)$$

$$\sum \begin{array}{cc} \square & \\ & \square \\ \square & \end{array} = 0$$

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 + y_1 \end{pmatrix}$$

Automate de
Maass et Martinez.

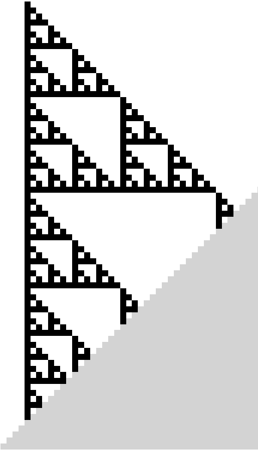
Randomisation directe



$$\vec{u} = \binom{1}{1}$$

$$\sum \begin{matrix} \square & \\ \square & \square \end{matrix} = 0$$

Randomisation directe



Fonction de dépendance

($\square = 0, \blacksquare = Id$)

$$\vec{u} = \binom{1}{1}$$

$$\sum \begin{matrix} \square & \\ \square & \square \end{matrix} = 0$$

$$x_{0,t} = \underset{\to\infty}{\underleftrightarrow{x_{i_0,i_0} + x_{i_1,i_1} + \cdots + x_{i_n,i_n}}}$$

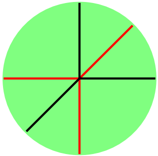
Conclusion

H., Salo, Theyssier 2017

Un AC algébrique randomise en moyenne de Cesàro si et seulement si il admet un *soliton*: un point fixe pour F^p (à décalage près)

- Lien entre randomisation, forme annulatrice, directions de déterminisme ?
  (TEP subshifts, Salo 2022)
- Lien entre randomisation directe et réversibilité ?
- Comment prouver la randomisation sans outils algébriques ?
- Quelle propriété (d'expansivité ?) caractérise les automates randomisants ?

$$\sum \begin{matrix} \square & \\ \square & \square \end{matrix} = 0$$



Échecs

avec Maass, Marcovici, Sablik: $F(x)_0 = \tau(x_0 + x_1)$ pour une permutation τ
avec Paviet-Salomon: $G = \mathfrak{S}_3$, $F(x)_0 = x_0 \circ x_1$