

Dynamique de Kawasaki et transition de phase

Benoit Dagallier

Université Paris Dauphine-PSL

avec Roland Bauerschmidt et Thierry Bodineau

Rencontres mathématiques de Rouen, 20 Juin 2025

Funded by European Union's Horizon 2020 research and innovation programme – Marie Skłodowska-Curie grant agreement No 101034255

Motivation :

De nombreux algorithmes d'échantillonnages locaux et motivés physiquement de modèles de physique statistique ralentissent au voisinage d'une transition de phase.

Quelle en est la cause ? Est-ce évitable ?

- Modèle d'Ising et dynamique de Glauber.
- Contrainte sur l'aimantation et dynamique Kawasaki : définition et résultats.
- Idée de la preuve : décomposition d'échelle, condition spectrale et 'down-up walk'.

Modèle d'Ising : définition

Définition

Modèle d'Ising sur N sites $[N] = \{1, \dots, N\}$ avec interaction βA :

$$\mu_\beta(\sigma) = \frac{1}{Z_{\beta A}} \exp \left[-\frac{\beta}{2} (\sigma, A\sigma) \right], \quad \sigma \in \{-1, 1\}^{[N]}.$$

- $\beta \in [0, \infty]$: température inverse, $Z_{\beta A}$ normalisation. $\sigma \in \{-1, 1\}^{[N]}$ configuration (de spins) et si $u, v \in \mathbb{R}^{[N]}$, $(u, v) := \sum_{i \in [N]} u_i v_i$.
- A : matrice encodant la structure de graphe. E.g. pour un graphe (V, E) avec N sommets :

$$A_{i,j} = \begin{cases} -\mathbf{1}_{(i,j) \in E} & \text{if } i \neq j, \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Pour simplifier, l'interaction sera toujours cette A (modèle d'Ising ferromagnétique aux plus proches voisins).

Modèle d'Ising : définition

Définition

Modèle d'Ising sur N sites $[N] = \{1, \dots, N\}$ avec interaction βA :

$$\mu_\beta(\sigma) = \frac{1}{Z_{\beta A}} \exp \left[-\frac{\beta}{2} (\sigma, A\sigma) \right], \quad \sigma \in \{-1, 1\}^{[N]}.$$

- $\beta \in [0, \infty]$: température inverse, $Z_{\beta A}$ normalisation. $\sigma \in \{-1, 1\}^{[N]}$ configuration (de spins) et si $u, v \in \mathbb{R}^{[N]}$, $(u, v) := \sum_{i \in [N]} u_i v_i$.
- A : matrice encodant la structure de graphe. E.g. pour un graphe (V, E) avec N sommets :

$$A_{i,j} = \begin{cases} -\mathbf{1}_{(i,j) \in E} & \text{if } i \neq j, \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Pour simplifier, l'interaction sera toujours cette A (modèle d'Ising ferromagnétique aux plus proches voisins).

Modèle d'Ising : définition

Définition

Modèle d'Ising sur N sites $[N] = \{1, \dots, N\}$ avec interaction βA :

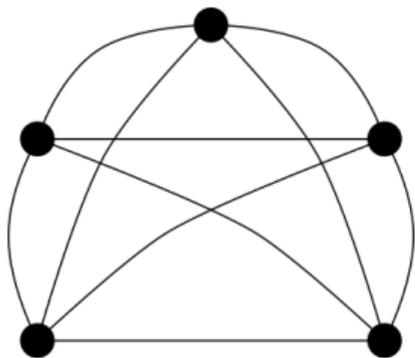
$$\mu_\beta(\sigma) = \frac{1}{Z_{\beta A}} \exp \left[-\frac{\beta}{2} (\sigma, A\sigma) \right], \quad \sigma \in \{-1, 1\}^{[N]}.$$

- $\beta \in [0, \infty]$: température inverse, $Z_{\beta A}$ normalisation. $\sigma \in \{-1, 1\}^{[N]}$ configuration (de spins) et si $u, v \in \mathbb{R}^{[N]}$, $(u, v) := \sum_{i \in [N]} u_i v_i$.
- A : matrice encodant la structure de graphe. E.g. pour un graphe (V, E) avec N sommets :

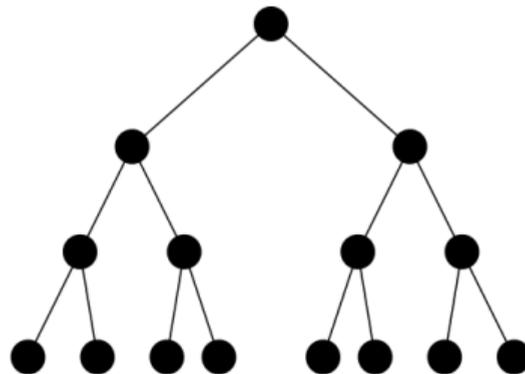
$$A_{i,j} = \begin{cases} -\mathbf{1}_{(i,j) \in E} & \text{if } i \neq j, \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Pour simplifier, l'interaction sera toujours cette A (modèle d'Ising ferromagnétique aux plus proches voisins).

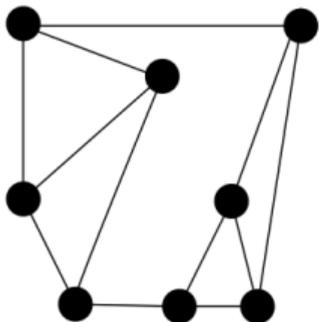
Exemple de géométries



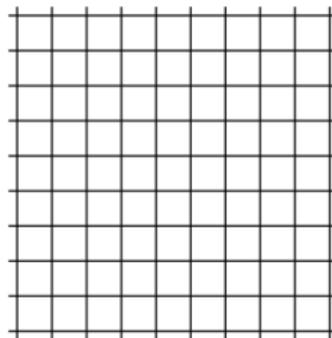
complete graph



binary tree



3 regular



square

Question :

Comment échantillonner la mesure d'Ising μ_β ?

Dynamique de Glauber, choix populaire, simple et efficace :

- Chaîne de Markov (ici en temps continu, versions discrètes existent aussi), réversible pour μ_β .
- Chaque mise à jour change au plus un seul spin : taux de saut $c(\sigma, \sigma') = 0$ sauf si $\sigma' = \sigma^x$ pour un $x \in [N]$.
- Taux de saut $c(\sigma, \sigma)$ locaux : $c(\sigma, \sigma^x) = c(\sigma', (\sigma')^x)$ si σ et σ' sont identiques dans une boule de rayon donné autour de $x \in [N]$.
- Convergence vers μ_β typiquement rapide jusqu'à une transition de phase.

Question :

Comment échantillonner la mesure d'Ising μ_β ?

Dynamique de Glauber, choix populaire, simple et efficace :

- **Chaîne de Markov** (ici en temps continu, versions discrètes existent aussi), **réversible** pour μ_β .
- Chaque mise à jour change au plus **un seul spin** : taux de saut $c(\sigma, \sigma') = 0$ sauf si $\sigma' = \sigma^x$ pour un $x \in [N]$.
- Taux de saut $c(\sigma, \sigma)$ **locaux** : $c(\sigma, \sigma^x) = c(\sigma', (\sigma')^x)$ si σ et σ' sont identiques dans une boule de rayon donné autour de $x \in [N]$.
- Convergence vers μ_β typiquement **rapide** jusqu'à une **transition de phase**.

Question :

Comment échantillonner la mesure d'Ising μ_β ?

Dynamique de Glauber, choix populaire, simple et efficace :

- Chaîne de Markov (ici en temps continu, versions discrètes existent aussi), réversible pour μ_β .
- Chaque mise à jour change au plus un seul spin : taux de saut $c(\sigma, \sigma') = 0$ sauf si $\sigma' = \sigma^x$ pour un $x \in [N]$.
- Taux de saut $c(\sigma, \sigma)$ locaux : $c(\sigma, \sigma^x) = c(\sigma', (\sigma')^x)$ si σ et σ' sont identiques dans une boule de rayon donné autour de $x \in [N]$.
- Convergence vers μ_β typiquement rapide jusqu'à une transition de phase.

Question :

Comment échantillonner la mesure d'Ising μ_β ?

Dynamique de Glauber, choix populaire, simple et efficace :

- Chaîne de Markov (ici en temps continu, versions discrètes existent aussi), réversible pour μ_β .
- Chaque mise à jour change au plus un seul spin : taux de saut $c(\sigma, \sigma') = 0$ sauf si $\sigma' = \sigma^x$ pour un $x \in [N]$.
- Taux de saut $c(\sigma, \sigma)$ locaux : $c(\sigma, \sigma^x) = c(\sigma', (\sigma')^x)$ si σ et σ' sont identiques dans une boule de rayon donné autour de $x \in [N]$.
- Convergence vers μ_β typiquement rapide jusqu'à une transition de phase.

Question :

Comment échantillonner la mesure d'Ising μ_β ?

Dynamique de Glauber, choix populaire, simple et efficace :

- **Chaîne de Markov** (ici en temps continu, versions discrètes existent aussi), **réversible** pour μ_β .
- Chaque mise à jour change au plus **un seul spin** : taux de saut $c(\sigma, \sigma') = 0$ sauf si $\sigma' = \sigma^x$ pour un $x \in [N]$.
- Taux de saut $c(\sigma, \sigma)$ **locaux** : $c(\sigma, \sigma^x) = c(\sigma', (\sigma')^x)$ si σ et σ' sont identiques dans une boule de rayon donné autour de $x \in [N]$.
- Convergence vers μ_β typiquement **rapide** jusqu'à une **transition de phase**.

Mesurer la vitesse de convergence

Question :

Comment mesurer la vitesse de convergence d'une dynamique ?

- **Inégalités fonctionnelles** : pour tout $F : \{-1, 1\}^{[M]} \rightarrow \mathbb{R}_+$ et si $\Phi(x) = x \log x$,

$$\text{Var}_{\mu_\beta}(F) := \mathbb{E}_{\mu_\beta}[F^2] - \mathbb{E}_{\mu_\beta}[F]^2 \leq \frac{1}{\gamma} D(F, F) \quad (\text{Poincaré}(\gamma)),$$

$$\text{Ent}_{\mu_\beta}(F) := \mathbb{E}_{\mu_\beta}[\Phi(F)] - \Phi(\mathbb{E}_{\mu_\beta}[F]) \leq \frac{1}{2\gamma} D(F, \log F) \quad (\text{mLSI}(\gamma)),$$

avec $D(F, G)$ **forme de Dirichlet** encodant la dynamique :

$$D(F, G) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \mu_\beta(\sigma) c(\sigma, \sigma') [F(\sigma') - F(\sigma)][G(\sigma') - G(\sigma)].$$

Mesurer la vitesse de convergence

Question :

Comment mesurer la vitesse de convergence d'une dynamique ?

- **Inégalités fonctionnelles** : pour tout $F : \{-1, 1\}^{[M]} \rightarrow \mathbb{R}_+$ et si $\Phi(x) = x \log x$,

$$\text{Var}_{\mu_\beta}(F) := \mathbb{E}_{\mu_\beta}[F^2] - \mathbb{E}_{\mu_\beta}[F]^2 \leq \frac{1}{\gamma} D(F, F) \quad (\text{Poincaré}(\gamma)),$$

$$\text{Ent}_{\mu_\beta}(F) := \mathbb{E}_{\mu_\beta}[\Phi(F)] - \Phi(\mathbb{E}_{\mu_\beta}[F]) \leq \frac{1}{2\gamma} D(F, \log F) \quad (\text{mLSI}(\gamma)),$$

avec $D(F, G)$ **forme de Dirichlet** encodant la dynamique :

$$D(F, G) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \mu_\beta(\sigma) c(\sigma, \sigma') [F(\sigma') - F(\sigma)][G(\sigma') - G(\sigma)].$$

Question :

Comment mesurer la vitesse de convergence d'une dynamique ?

- Si $(P_t)_{t \geq 0}$ semi-groupe associé à la dynamique :

$$\text{Poincaré}(\gamma) \Leftrightarrow \text{Var}_{\mu_\beta}(P_t F) \leq e^{-2\gamma t} \text{Var}_{\mu_\beta}(F),$$

$$\text{mLSI}(\gamma) \Leftrightarrow \text{Ent}_{\mu_\beta}(P_t F) \leq e^{-2\gamma t} \text{Ent}_{\mu_\beta}(F).$$

- $\text{mLSI}(\gamma) \Rightarrow \text{Poincaré}(\gamma)$.

- $\text{mLSI}(\gamma) \Rightarrow$ temps de mélange $t_{\text{mix}} \leq \gamma^{-1}(\log N + 4 \log 2)$, où:

$$t_{\text{mix}} := \inf \left\{ t \geq 0 : \max_{\sigma} \|P_t(\sigma, \cdot) - \mu_\beta\|_{\text{TV}} \leq 1/4 \right\}.$$

Question :

Comment mesurer la vitesse de convergence d'une dynamique ?

- Si $(P_t)_{t \geq 0}$ semi-groupe associé à la dynamique :

$$\text{Poincaré}(\gamma) \Leftrightarrow \text{Var}_{\mu_\beta}(P_t F) \leq e^{-2\gamma t} \text{Var}_{\mu_\beta}(F),$$

$$\text{mLSI}(\gamma) \Leftrightarrow \text{Ent}_{\mu_\beta}(P_t F) \leq e^{-2\gamma t} \text{Ent}_{\mu_\beta}(F).$$

- $\text{mLSI}(\gamma) \Rightarrow \text{Poincaré}(\gamma)$.

- $\text{mLSI}(\gamma) \Rightarrow$ temps de mélange $t_{\text{mix}} \leq \gamma^{-1}(\log N + 4 \log 2)$, où:

$$t_{\text{mix}} := \inf \left\{ t \geq 0 : \max_{\sigma} \|P_t(\sigma, \cdot) - \mu_\beta\|_{\text{TV}} \leq 1/4 \right\}.$$

Question :

Comment mesurer la vitesse de convergence d'une dynamique ?

- Si $(P_t)_{t \geq 0}$ semi-groupe associé à la dynamique :

$$\text{Poincaré}(\gamma) \Leftrightarrow \text{Var}_{\mu_\beta}(P_t F) \leq e^{-2\gamma t} \text{Var}_{\mu_\beta}(F),$$

$$\text{mLSI}(\gamma) \Leftrightarrow \text{Ent}_{\mu_\beta}(P_t F) \leq e^{-2\gamma t} \text{Ent}_{\mu_\beta}(F).$$

- $\text{mLSI}(\gamma) \Rightarrow \text{Poincaré}(\gamma)$.
- $\text{mLSI}(\gamma) \Rightarrow$ temps de mélange $t_{\text{mix}} \leq \gamma^{-1}(\log N + 4 \log 2)$, où:

$$t_{\text{mix}} := \inf \left\{ t \geq 0 : \max_{\sigma} \|P_t(\sigma, \cdot) - \mu_\beta\|_{\text{TV}} \leq 1/4 \right\}.$$

Dynamique de Glauber et transition de phase

Theorem

Pour Ising ferromagnétique μ_β sur : le graphe complet, ou un d -arbre, ou un graphe aléatoire d -régulier, ou une boîte dans \mathbb{Z}^d ($d \geq 2$) ; tous avec N sommets.

- Il existe $\beta_c \in (0, \infty)$ tel que, si $\beta < \beta_c$:
Poincaré(γ)/mLSI(γ) valides avec γ^{-1} indépendant de N (avec probabilité $1 - o_N(1)$ si graphe aléatoire).
- Convergence lente si $\beta > \beta_c$ (typiquement exponentielle en N , sur l'arbre une grande puissance de N).
- Le seuil β_c correspond à une transition de phase statique :

$$\beta_c := \sup \left\{ \beta \geq 0 : \sup_N \sum_{i \in [N]} \text{Cov}_{\mu_\beta}(\sigma_1, \sigma_i) < \infty \right\}.$$

[Martinelli-Sinclair-Weitz'04 (arbres); Mossel-Sly'13 (graphes complet et réguliers aléatoires, cf aussi Montanari-Gerschenfeld'07); nombreux auteurs sur \mathbb{Z}^d dont Martinelli'99]

Dynamique de Glauber et transition de phase

Theorem

Pour Ising ferromagnétique μ_β sur : le graphe complet, ou un d -arbre, ou un graphe aléatoire d -régulier, ou une boîte dans \mathbb{Z}^d ($d \geq 2$) ; tous avec N sommets.

- Il existe $\beta_c \in (0, \infty)$ tel que, si $\beta < \beta_c$:
Poincaré(γ)/mLSI(γ) valides avec γ^{-1} indépendant de N (avec probabilité $1 - o_N(1)$ si graphe aléatoire).
- Convergence lente si $\beta > \beta_c$ (typiquement exponentielle en N , sur l'arbre une grande puissance de N).
- Le seuil β_c correspond à une transition de phase statique :

$$\beta_c := \sup \left\{ \beta \geq 0 : \sup_N \sum_{i \in [N]} \text{Cov}_{\mu_\beta}(\sigma_1, \sigma_i) < \infty \right\}.$$

[Martinelli-Sinclair-Weitz'04 (arbres); Mossel-Sly'13 (graphes complet et réguliers aléatoires, cf aussi Montanari-Gerschenfeld'07); nombreux auteurs sur \mathbb{Z}^d dont Martinelli'99]

Dynamique de Glauber et transition de phase

Theorem

Pour Ising ferromagnétique μ_β sur : le graphe complet, ou un d -arbre, ou un graphe aléatoire d -régulier, ou une boîte dans \mathbb{Z}^d ($d \geq 2$) ; tous avec N sommets.

- Il existe $\beta_c \in (0, \infty)$ tel que, si $\beta < \beta_c$:
Poincaré(γ)/mLSI(γ) valides avec γ^{-1} indépendant de N (avec probabilité $1 - o_N(1)$ si graphe aléatoire).
- Convergence lente si $\beta > \beta_c$ (typiquement exponentielle en N , sur l'arbre une grande puissance de N).
- Le seuil β_c correspond à une transition de phase statique :

$$\beta_c := \sup \left\{ \beta \geq 0 : \sup_N \sum_{i \in [N]} \text{Cov}_{\mu_\beta}(\sigma_1, \sigma_i) < \infty \right\}.$$

[Martinelli-Sinclair-Weitz'04 (arbres); Mossel-Sly'13 (graphes complet et réguliers aléatoires, cf aussi Montanari-Gerschenfeld'07); nombreux auteurs sur \mathbb{Z}^d dont Martinelli'99]

Dynamique de Glauber et transition de phase

Theorem

Pour Ising ferromagnétique μ_β sur : le graphe complet, ou un d -arbre, ou un graphe aléatoire d -régulier, ou une boîte dans \mathbb{Z}^d ($d \geq 2$) ; tous avec N sommets.

- Il existe $\beta_c \in (0, \infty)$ tel que, si $\beta < \beta_c$:
Poincaré(γ)/mLSI(γ) valides avec γ^{-1} **indépendant de N** (avec probabilité $1 - o_N(1)$ si graphe aléatoire).
- Convergence **lente** si $\beta > \beta_c$ (typiquement exponentielle en N , sur l'arbre une grande puissance de N).
- Le seuil β_c correspond à une **transition de phase** statique :

$$\beta_c := \sup \left\{ \beta \geq 0 : \sup_N \sum_{i \in [N]} \text{Cov}_{\mu_\beta}(\sigma_1, \sigma_i) < \infty \right\}.$$

[Martinelli-Sinclair-Weitz'04 (arbres); Mossel-Sly'13 (graphes complet et réguliers aléatoires, cf aussi Montanari-Gerschenfeld'07); nombreux auteurs sur \mathbb{Z}^d dont Martinelli'99]

Résumé sur la dynamique de Glauber

- Les modèles d'Ising définis sur des graphes généraux ont une **transition de phase**. Transition indiquée par de grandes corrélations entre spins (**divergeant avec N**) .
- Dynamique de Glauber : algorithme efficace **au dessus** ($\beta < \beta_c$) de la transition de phase, où la convergence est **indépendante de N** .
Ralentissement drastique sous la transition ($\beta > \beta_c$).
- Vitesse de convergence mesurée via **inégalités fonctionnelles**, i.e. principes variationnels sur les observables du modèle.

Question :

Quelles observables ralentissent à la transition ?

Peut-on trouver une dynamique semblable à Glauber (locale, réversible) qui échantillonne efficacement Ising si les observables lentes sont ignorées dans un sens à préciser ?

Résumé sur la dynamique de Glauber

- Les modèles d'Ising définis sur des graphes généraux ont une **transition de phase**. Transition indiquée par de grandes corrélations entre spins (**divergeant avec N**) .
- Dynamique de Glauber : algorithme efficace **au dessus ($\beta < \beta_c$)** de la transition de phase, où la convergence est **indépendante de N** .
Ralentissement drastique sous la transition ($\beta > \beta_c$).
- Vitesse de convergence mesurée via **inégalités fonctionnelles**, i.e. principes variationnels sur les observables du modèle.

Question :

Quelles observables ralentissent à la transition ?

Peut-on trouver une dynamique semblable à Glauber (locale, réversible) qui échantillonne efficacement Ising si les observables lentes sont ignorées dans un sens à préciser ?

Résumé sur la dynamique de Glauber

- Les modèles d'Ising définis sur des graphes généraux ont une **transition de phase**. Transition indiquée par de grandes corrélations entre spins (**divergeant avec N**) .
- Dynamique de Glauber : algorithme efficace **au dessus ($\beta < \beta_c$)** de la transition de phase, où la convergence est **indépendante de N** .
Ralentissement drastique sous la transition ($\beta > \beta_c$).
- Vitesse de convergence mesurée via **inégalités fonctionnelles**, i.e. principes variationnels sur les observables du modèle.

Question :

Quelles observables ralentissent à la transition ?

Peut-on trouver une dynamique semblable à Glauber (locale, réversible) qui échantillonne efficacement Ising si les observables lentes sont ignorées dans un sens à préciser ?

Résumé sur la dynamique de Glauber

- Les modèles d'Ising définis sur des graphes généraux ont une **transition de phase**. Transition indiquée par de grandes corrélations entre spins (**divergeant avec N**) .
- Dynamique de Glauber : algorithme efficace **au dessus ($\beta < \beta_c$)** de la transition de phase, où la convergence est **indépendante de N** .
Ralentissement drastique sous la transition ($\beta > \beta_c$).
- Vitesse de convergence mesurée via **inégalités fonctionnelles**, i.e. principes variationnels sur les observables du modèle.

Question :

Quelles observables ralentissent à la transition ?

Peut-on trouver une dynamique semblable à Glauber (locale, réversible) qui échantillonne efficacement Ising si les observables lentes sont ignorées dans un sens à préciser ?

Question :

Quelles observables ralentissent à la transition ?

Peut-on trouver une dynamique semblable à Glauber (locale, réversible) qui échantillonne efficacement Ising si les observables lentes sont ignorées dans un sens à préciser ?

$$\forall F : \{-1, 1\}^M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{Var}_{\mu_\beta}(F) \leq \frac{1}{\gamma} D(F, F) \quad (\text{Poincaré}(\gamma))$$

- $\sum_i \text{Cov}_{\mu_\beta}(\sigma_1, \sigma_i) = \text{Var}_{\mu_\beta}(\sum_i \sigma_i / \sqrt{N})$ explose en $\beta_c \Rightarrow$ aimantation $\sum_i \sigma_i$ ralentit **nécessairement**.
- Quelles autres F ralentissent la dynamique dépend fortement de la géométrie (exemples bientôt).
- Obtenir une meilleure constante γ dans Poincaré(γ)/mLSI(γ) en restreignant à un sous-ensemble d'observables est difficile.

Idée :

Considérer un modèle d'Ising *conditionné* sur les observables lentes et regarder si la dynamique naturelle associée reste rapide pour $\beta > \beta_c$.

Question :

Quelles observables ralentissent à la transition ?

Peut-on trouver une dynamique semblable à Glauber (locale, réversible) qui échantillonne efficacement Ising si les observables lentes sont ignorées dans un sens à préciser ?

$$\forall F : \{-1, 1\}^M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{Var}_{\mu_\beta}(F) \leq \frac{1}{\gamma} D(F, F) \quad (\text{Poincaré}(\gamma))$$

- $\sum_i \text{Cov}_{\mu_\beta}(\sigma_1, \sigma_i) = \text{Var}_{\mu_\beta}(\sum_i \sigma_i / \sqrt{N})$ explose en $\beta_c \Rightarrow$ aimantation $\sum_i \sigma_i$ ralentit **nécessairement**.
- Quelles autres F ralentissent la dynamique dépend fortement de la géométrie (exemples bientôt).
- Obtenir une meilleure constante γ dans Poincaré(γ)/mLSI(γ) en restreignant à un sous-ensemble d'observables est difficile.

Idée :

Considérer un modèle d'Ising *conditionné* sur les observables lentes et regarder si la dynamique naturelle associée reste rapide pour $\beta > \beta_c$.

Question :

Quelles observables ralentissent à la transition ?

Peut-on trouver une dynamique semblable à Glauber (locale, réversible) qui échantillonne efficacement Ising si les observables lentes sont ignorées dans un sens à préciser ?

$$\forall F : \{-1, 1\}^M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{Var}_{\mu_\beta}(F) \leq \frac{1}{\gamma} D(F, F) \quad (\text{Poincaré}(\gamma))$$

- $\sum_i \text{Cov}_{\mu_\beta}(\sigma_1, \sigma_i) = \text{Var}_{\mu_\beta}(\sum_i \sigma_i / \sqrt{N})$ explose en $\beta_c \Rightarrow$ aimantation $\sum_i \sigma_i$ ralentit **nécessairement**.
- Quelles autres F ralentissent la dynamique dépend fortement de la géométrie (exemples bientôt).
- Obtenir une meilleure constante γ dans Poincaré(γ)/mLSI(γ) en restreignant à un sous-ensemble d'observables est difficile.

Idée :

Considérer un modèle d'Ising *conditionné* sur les observables lentes et regarder si la dynamique naturelle associée reste rapide pour $\beta > \beta_c$.

Question :

Quelles observables ralentissent à la transition ?

Peut-on trouver une dynamique semblable à Glauber (locale, réversible) qui échantillonne efficacement Ising si les observables lentes sont ignorées dans un sens à préciser ?

$$\forall F : \{-1, 1\}^M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{Var}_{\mu_\beta}(F) \leq \frac{1}{\gamma} D(F, F) \quad (\text{Poincaré}(\gamma))$$

- $\sum_i \text{Cov}_{\mu_\beta}(\sigma_1, \sigma_i) = \text{Var}_{\mu_\beta}(\sum_i \sigma_i / \sqrt{N})$ explose en $\beta_c \Rightarrow$ aimantation $\sum_i \sigma_i$ ralentit **nécessairement**.
- Quelles autres F ralentissent la dynamique dépend fortement de la géométrie (exemples bientôt).
- Obtenir une meilleure constante γ dans Poincaré(γ)/mLSI(γ) en restreignant à un sous-ensemble d'observables est difficile.

Idée :

Considérer un modèle d'Ising *conditionné* sur les observables lentes et regarder si la dynamique naturelle associée reste rapide pour $\beta > \beta_c$.

Question :

Quelles observables ralentissent à la transition ?

Peut-on trouver une dynamique semblable à Glauber (locale, réversible) qui échantillonne efficacement Ising si les observables lentes sont ignorées dans un sens à préciser ?

$$\forall F : \{-1, 1\}^M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{Var}_{\mu_\beta}(F) \leq \frac{1}{\gamma} D(F, F) \quad (\text{Poincaré}(\gamma))$$

- $\sum_i \text{Cov}_{\mu_\beta}(\sigma_1, \sigma_i) = \text{Var}_{\mu_\beta}(\sum_i \sigma_i / \sqrt{N})$ explose en $\beta_c \Rightarrow$ aimantation $\sum_i \sigma_i$ ralentit **nécessairement**.
- Quelles autres F ralentissent la dynamique dépend fortement de la géométrie (exemples bientôt).
- Obtenir une meilleure constante γ dans Poincaré(γ)/mLSI(γ) en restreignant à un sous-ensemble d'observables est difficile.

Idée :

Considérer un modèle d'Ising *conditionné* sur les observables lentes et regarder si la dynamique naturelle associée reste rapide pour $\beta > \beta_c$.

le modèle d'Ising canonique

- **Cas le plus simple** : conditionner uniquement sur l'aimantation $\sum_i \sigma_i$.
- Le **modèle d'Ising canonique** $\bar{\mu}_{\beta,m}$ est le modèle d'Ising conditionné à $\sum_i \sigma_i = Nm$:

$$\bar{\mu}_{\beta,m}(\sigma) = \frac{\mathbf{1}_{\Omega_{N,m}}(\sigma)}{Z_{\beta A,m}} \exp \left[-\frac{\beta}{2}(\sigma, A\sigma) \right],$$

$$\Omega_{N,m} := \{ \sigma \in \{-1, 1\}^{[M]} : \sum_i \sigma_i = Nm \}.$$

- Dynamique de Glauber mal définie : un saut $\sigma \rightarrow \sigma^i$ change l'aimantation.

le modèle d'Ising canonique

- Cas le plus simple : conditionner uniquement sur l'aimantation $\sum_i \sigma_i$.
- Le modèle d'Ising canonique $\bar{\mu}_{\beta,m}$ est le modèle d'Ising conditionné à $\sum_i \sigma_i = Nm$:

$$\bar{\mu}_{\beta,m}(\sigma) = \frac{\mathbf{1}_{\Omega_{N,m}}(\sigma)}{Z_{\beta A,m}} \exp \left[-\frac{\beta}{2}(\sigma, A\sigma) \right],$$

$$\Omega_{N,m} := \{ \sigma \in \{-1, 1\}^{[M]} : \sum_i \sigma_i = Nm \}.$$

- Dynamique de Glauber mal définie : un saut $\sigma \rightarrow \sigma^i$ change l'aimantation.

le modèle d'Ising canonique

- **Cas le plus simple** : conditionner uniquement sur l'aimantation $\sum_i \sigma_i$.
- Le **modèle d'Ising canonique** $\bar{\mu}_{\beta,m}$ est le modèle d'Ising conditionné à $\sum_i \sigma_i = Nm$:

$$\bar{\mu}_{\beta,m}(\sigma) = \frac{\mathbf{1}_{\Omega_{N,m}}(\sigma)}{Z_{\beta A,m}} \exp \left[-\frac{\beta}{2}(\sigma, A\sigma) \right],$$

$$\Omega_{N,m} := \{ \sigma \in \{-1, 1\}^{[M]} : \sum_i \sigma_i = Nm \}.$$

- Dynamique de Glauber mal définie : un saut $\sigma \rightarrow \sigma^i$ change l'aimantation.

Dynamique de Kawasaki : définition

- **Dynamique de Kawasaki** : chaîne de Markov réversible pour $\bar{\mu}_{\beta,m}$.
- Sauts changent le signe de deux spins voisins : pour $i \sim j$,

$$\text{sauts } \sigma \rightarrow \sigma^{i,j}, \quad \sigma_k^{i,j} = \begin{cases} \sigma_j & \text{si } k = i, \\ \sigma_i & \text{si } k = j, \\ \sigma_k & \text{sinon.} \end{cases}$$

- **Exemple** : si $\beta = 0$, $Nm \in \{\pm(N-2)\}$, dynamique de Kawasaki = marche aléatoire simple symétrique sur le graphe.
 Nm généraux : exclusion simple symétrique avec $k = N(m+1)/2$ particules.

Dynamique de Kawasaki : définition

- **Dynamique de Kawasaki** : chaîne de Markov réversible pour $\bar{\mu}_{\beta,m}$.
- Sauts changent le signe de deux spins voisins : pour $i \sim j$,

$$\text{sauts } \sigma \rightarrow \sigma^{i,j}, \quad \sigma_k^{i,j} = \begin{cases} \sigma_j & \text{si } k = i, \\ \sigma_i & \text{si } k = j, \\ \sigma_k & \text{sinon.} \end{cases}$$

- **Exemple** : si $\beta = 0$, $Nm \in \{\pm(N-2)\}$, dynamique de Kawasaki = marche aléatoire simple symétrique sur le graphe.
 Nm généraux : exclusion simple symétrique avec $k = N(m+1)/2$ particules.

Vitesse de convergence de la dynamique de Kawasaki pour deux géométries

- Exemple 1 : Ising canonique sur graphe complet $A_{i,j} = -\mathbf{1}_{i \neq j}$:

$$\bar{\mu}_{\beta,m}^{\text{cplt}}(\sigma) \propto \mathbf{1}_{\sum_i \sigma_i = Nm}(\sigma) \exp \left[\frac{\beta}{2} \left(\sum_i \sigma_i \right)^2 \right] \propto \mathbf{1}_{\Omega_{N,m}}(\sigma).$$

$\bar{\mu}_{\beta,m}^{\text{cplt}}$: mesure uniforme sur $\Omega_{N,m}$ = Ising canonique à **température infinie**.

⇒ Vitesse de convergence **indépendente** de la température β^{-1} .

- Exemple 2 : cube $\{1, \dots, L\}^d \subset \mathbb{Z}^d$ ($d \geq 2$).

Kawasaki **ralentit** à β_c (comme Glauber).

De plus, pour tout $\beta < \beta_c$, $m\text{LSI}(\gamma)$ satisfait avec $\gamma \approx L^{-2}$ uniformément en m .

Si $\beta > \beta_c$, $\log \gamma \approx -L^{c(d)}$ pour certains m . [Connu si $d = 2$ Cancrini-Cesi-Martinelli'98]

Vitesse de convergence de la dynamique de Kawasaki pour deux géométries

- **Exemple 1** : Ising canonique sur graphe complet $A_{i,j} = -\mathbf{1}_{i \neq j}$:

$$\bar{\mu}_{\beta,m}^{\text{cplt}}(\sigma) \propto \mathbf{1}_{\sum_i \sigma_i = Nm}(\sigma) \exp \left[\frac{\beta}{2} \left(\sum_i \sigma_i \right)^2 \right] \propto \mathbf{1}_{\Omega_{N,m}}(\sigma).$$

$\bar{\mu}_{\beta,m}^{\text{cplt}}$: mesure uniforme sur $\Omega_{N,m}$ = Ising canonique à **température infinie**.

⇒ Vitesse de convergence **indépendente** de la température β^{-1} .

- **Exemple 2** : cube $\{1, \dots, L\}^d \subset \mathbb{Z}^d$ ($d \geq 2$).

Kawasaki **ralentit à β_c** (comme Glauber).

De plus, pour tout $\beta < \beta_c$, $m\text{LSI}(\gamma)$ satisfait avec $\gamma \approx L^{-2}$ uniformément en m .

Si $\beta > \beta_c$, $\log \gamma \approx -L^{c(d)}$ pour certains m . [Connu si $d = 2$ Cancrini-Cesi-Martinelli'98]

Résumé

- A β_c , **aimantation ralentit** ainsi peut-être que d'autres observables en fonction de la géométrie.
- Cas le plus simple : Ising conditionné sur l'aimantation. Dynamique de Kawasaki remplace dynamique de Glauber.
- Si l'aimantation est la seule observable lente, Kawasaki devrait rester rapide si $\beta < \beta_c$ (vrai sur graphe complet). Sinon Kawasaki devrait ralentir pour $\beta > \beta_c$, comme Glauber (su pour un carré dans \mathbb{Z}^2).

Question :

Graphes non triviaux (non complets) où seule l'aimantation est lente, i.e. tels que Kawasaki est rapide (polynomiale) tandis que Glauber est lent (exponentiel) ?

Résumé

- A β_c , **aimantation ralentit** ainsi peut-être que d'autres observables en fonction de la géométrie.
- Cas le plus simple : Ising conditionné sur l'aimantation. Dynamique de Kawasaki remplace dynamique de Glauber.
- Si l'aimantation est la seule observable lente, Kawasaki devrait rester rapide si $\beta < \beta_c$ (vrai sur graphe complet). Sinon Kawasaki devrait ralentir pour $\beta > \beta_c$, comme Glauber (su pour un carré dans \mathbb{Z}^2).

Question :

Graphes non triviaux (non complets) où seule l'aimantation est lente, i.e. tels que Kawasaki est rapide (polynomiale) tandis que Glauber est lent (exponentiel) ?

Résumé

- A β_c , **aimantation ralentit** ainsi peut-être que d'autres observables en fonction de la géométrie.
- Cas le plus simple : Ising conditionné sur l'aimantation. Dynamique de Kawasaki remplace dynamique de Glauber.
- Si l'aimantation est la seule observable lente, Kawasaki devrait rester rapide si $\beta < \beta_c$ (vrai sur graphe complet). Sinon Kawasaki devrait ralentir pour $\beta > \beta_c$, comme Glauber (su pour un carré dans \mathbb{Z}^2).

Question :

Graphes non triviaux (non complets) où seule l'aimantation est lente, i.e. tels que Kawasaki est rapide (polynomiale) tandis que Glauber est lent (exponentiel) ?

Résumé

- A β_c , **aimantation ralentit** ainsi peut-être que d'autres observables en fonction de la géométrie.
- Cas le plus simple : Ising conditionné sur l'aimantation. Dynamique de Kawasaki remplace dynamique de Glauber.
- Si l'aimantation est la seule observable lente, Kawasaki devrait rester rapide si $\beta < \beta_c$ (vrai sur graphe complet). Sinon Kawasaki devrait ralentir pour $\beta > \beta_c$, comme Glauber (su pour un carré dans \mathbb{Z}^2).

Question :

Graphes non triviaux (non complets) où seule l'aimantation est lente, i.e. tels que Kawasaki est rapide (polynomiale) tandis que Glauber est lent (exponentiel) ?

Convergence rapide pour graphe aléatoire régulier

Question :

Graphes non triviaux (non complets) où seule l'aimantation est lente, i.e. tels que Kawasaki est rapide (polynomiale) tandis que Glauber est lent (exponentiel) ?

► Oui, et si $d \geq 3$, c'est typiquement le cas pour un graphe d -régulier.

Theorem (Bauerschmidt-Bodineau-Dagallier'23)

Si $d \geq 3$ et un graphe aléatoire d -régulier sur N sommets (alors $\beta_c = \tanh^{-1}(1/(d-1)) \sim 1/d$ avec probabilité $1 - o_N(1)$ quand $N \rightarrow \infty$).

Pour tout $\beta < 1/(8\sqrt{(d-1)})$, uniformément en m , la dynamique de Kawasaki pour Ising canonique satisfait mLSI(γ) avec $\gamma^{-1} = O_{\beta,d}((\log N)^5)$ avec probabilité $1 - o_N(1)$.

Convergence rapide pour graphe aléatoire régulier

Question :

Graphes non triviaux (non complets) où seule l'aimantation est lente, i.e. tels que Kawasaki est rapide (polynomiale) tandis que Glauber est lent (exponentiel) ?

► Oui, et si $d \geq 3$, c'est typiquement le cas pour un graphe d -régulier.

Theorem (Bauerschmidt-Bodineau-Dagallier'23)

Si $d \geq 3$ et un graphe aléatoire d -régulier sur N sommets (alors $\beta_c = \tanh^{-1}(1/(d-1)) \sim 1/d$ avec probabilité $1 - o_N(1)$ quand $N \rightarrow \infty$).

Pour tout $\beta < 1/(8\sqrt{(d-1)})$, uniformément en m , la dynamique de Kawasaki pour Ising canonique satisfait mLSI(γ) avec $\gamma^{-1} = O_{\beta,d}((\log N)^5)$ avec probabilité $1 - o_N(1)$.

Discussion

Theorem (Bauerschmidt-Bodineau-Dagallier'23)

Soit $d \geq 3$ et un graphe aléatoire d -régulier sur N sommets uniforme (alors $\beta_c = \tanh^{-1}(1/(d-1)) \sim 1/d$ avec probabilité $1 - o_N(1)$).

Pour tout $\beta < 1/(8\sqrt{(d-1)})$, uniformément en m , la dynamique de Kawasaki pour Ising canonique satisfait mLSI(γ) avec $\gamma^{-1} = O_{\beta,d}((\log N)^5)$ avec probabilité $1 - o_N(1)$.

- Si $d \gg 1$ le seuil $\sim 1/(8\sqrt{d})$ est bien plus grand que le seuil critique $\beta_c \sim 1/d$.
- $(\log N)^5$: non optimal, $O_N(1)$ devrait être vrai (toujours uniformément en m).
- $1/(8\sqrt{(d-1)})$: lié au spectre de la matrice d'adjacence d'un graphe aléatoire d -régulier. Egalement non optimal. Plausible seuil optimal : $\beta_r := \tanh^{-1}(1/\sqrt{(d-1)})$ (seuil de reconstruction pour l'arbre).
- Prouvé en montrant un résultat similaire sur une dynamique longue portée.

Discussion

Theorem (Bauerschmidt-Bodineau-Dagallier'23)

Soit $d \geq 3$ et un graphe aléatoire d -régulier sur N sommets uniforme (alors $\beta_c = \tanh^{-1}(1/(d-1)) \sim 1/d$ avec probabilité $1 - o_N(1)$).

Pour tout $\beta < 1/(8\sqrt{(d-1)})$, uniformément en m , la dynamique de Kawasaki pour Ising canonique satisfait mLSI(γ) avec $\gamma^{-1} = O_{\beta,d}((\log N)^5)$ avec probabilité $1 - o_N(1)$.

- Si $d \gg 1$ le seuil $\sim 1/(8\sqrt{d})$ est bien plus grand que le seuil critique $\beta_c \sim 1/d$.
- $(\log N)^5$: non optimal, $O_N(1)$ devrait être vrai (toujours uniformément en m).
- $1/(8\sqrt{(d-1)})$: lié au spectre de la matrice d'adjacence d'un graphe aléatoire d -régulier. Également non optimal. Plausible seuil optimal : $\beta_r := \tanh^{-1}(1/\sqrt{(d-1)})$ (seuil de reconstruction pour l'arbre).
- Prouvé en montrant un résultat similaire sur une dynamique longue portée.

Discussion

Theorem (Bauerschmidt-Bodineau-Dagallier'23)

Soit $d \geq 3$ et un graphe aléatoire d -régulier sur N sommets uniforme (alors $\beta_c = \tanh^{-1}(1/(d-1)) \sim 1/d$ avec probabilité $1 - o_N(1)$).

Pour tout $\beta < 1/(8\sqrt{(d-1)})$, uniformément en m , la dynamique de Kawasaki pour Ising canonique satisfait mLSI(γ) avec $\gamma^{-1} = O_{\beta,d}((\log N)^5)$ avec probabilité $1 - o_N(1)$.

- Si $d \gg 1$ le seuil $\sim 1/(8\sqrt{d})$ est bien plus grand que le seuil critique $\beta_c \sim 1/d$.
- $(\log N)^5$: non optimal, $O_N(1)$ devrait être vrai (toujours uniformément en m).
- $1/(8\sqrt{(d-1)})$: lié au spectre de la matrice d'adjacence d'un graphe aléatoire d -régulier. Également non optimal. Plausible seuil optimal : $\beta_r := \tanh^{-1}(1/\sqrt{(d-1)})$ (seuil de reconstruction pour l'arbre).
- Prouvé en montrant un résultat similaire sur une dynamique longue portée.

Discussion

Theorem (Bauerschmidt-Bodineau-Dagallier'23)

Soit $d \geq 3$ et un graphe aléatoire d -régulier sur N sommets uniforme (alors $\beta_c = \tanh^{-1}(1/(d-1)) \sim 1/d$ avec probabilité $1 - o_N(1)$).

Pour tout $\beta < 1/(8\sqrt{(d-1)})$, uniformément en m , la dynamique de Kawasaki pour Ising canonique satisfait mLSI(γ) avec $\gamma^{-1} = O_{\beta,d}((\log N)^5)$ avec probabilité $1 - o_N(1)$.

- Si $d \gg 1$ le seuil $\sim 1/(8\sqrt{d})$ est bien plus grand que le seuil critique $\beta_c \sim 1/d$.
- $(\log N)^5$: non optimal, $O_N(1)$ devrait être vrai (toujours uniformément en m).
- $1/(8\sqrt{(d-1)})$: lié au spectre de la matrice d'adjacence d'un graphe aléatoire d -régulier. Egaleme nt non optimal. Plausible seuil optimal : $\beta_r := \tanh^{-1}(1/\sqrt{(d-1)})$ (seuil de reconstruction pour l'arbre).
- Prouvé en montrant un résultat similaire sur une dynamique longue portée.

Discussion

Theorem (Bauerschmidt-Bodineau-Dagallier'23)

Soit $d \geq 3$ et un graphe aléatoire d -régulier sur N sommets uniforme (alors $\beta_c = \tanh^{-1}(1/(d-1)) \sim 1/d$ avec probabilité $1 - o_N(1)$).

Pour tout $\beta < 1/(8\sqrt{(d-1)})$, uniformément en m , la dynamique de Kawasaki pour Ising canonique satisfait mLSI(γ) avec $\gamma^{-1} = O_{\beta,d}((\log N)^5)$ avec probabilité $1 - o_N(1)$.

- Si $d \gg 1$ le seuil $\sim 1/(8\sqrt{d})$ est bien plus grand que le seuil critique $\beta_c \sim 1/d$.
- $(\log N)^5$: non optimal, $O_N(1)$ devrait être vrai (toujours uniformément en m).
- $1/(8\sqrt{(d-1)})$: lié au spectre de la matrice d'adjacence d'un graphe aléatoire d -régulier. Egaleme nt non optimal. Plausible seuil optimal : $\beta_r := \tanh^{-1}(1/\sqrt{(d-1)})$ (seuil de reconstruction pour l'arbre).
- Prouvé en montrant un résultat similaire sur une dynamique longue portée.

Restriction sur β

Question :

D'où vient la restriction sur β ?

- Résultat valable sur graphes et modèles d'Ising généraux pour peu que leur matrice d'interaction A satisfasse la condition **spectrale, haute température** :

$$\beta\delta_A < 1/2, \quad \delta_A := \max \text{sp}\left(A - \frac{\lambda_1}{N}\mathbf{1}^T\mathbf{1}\right) - \min \text{sp}\left(A - \frac{\lambda_1}{N}\mathbf{1}^T\mathbf{1}\right)$$

- Vecteur propre $\mathbf{1}$ absent du fait de la contrainte. Condition spectrale semblable **sans retirer $\mathbf{1}$** valable pour dynamique de Glauber.
- Graphe aléatoire d -régulier sur N sommets : $A = (\mathbf{1}_{i\sim j})$ a un spectre dans $\{d\} \cup [-2\sqrt{d-1} - \varepsilon, 2\sqrt{d-1} + \varepsilon]$ avec probabilité $1 - o_N(1)$.
 \Rightarrow retirer le mode constant **réduit la largeur du spectre**.

Restriction sur β

Question :

D'où vient la restriction sur β ?

- Résultat valable sur graphes et modèles d'Ising généraux pour peu que leur matrice d'interaction A satisfasse la condition **spectrale, haute température** :

$$\beta\delta_A < 1/2, \quad \delta_A := \max \text{sp}\left(A - \frac{\lambda_1}{N} \mathbf{1}^T \mathbf{1}\right) - \min \text{sp}\left(A - \frac{\lambda_1}{N} \mathbf{1}^T \mathbf{1}\right)$$

- Vecteur propre $\mathbf{1}$ absent du fait de la contrainte. Condition spectrale semblable **sans retirer $\mathbf{1}$** valable pour dynamique de Glauber.
- Graphe aléatoire d -régulier sur N sommets : $A = (\mathbf{1}_{i \sim j})$ a un spectre dans $\{d\} \cup [-2\sqrt{d-1} - \varepsilon, 2\sqrt{d-1} + \varepsilon]$ avec probabilité $1 - o_N(1)$.
 \Rightarrow retirer le mode constant **réduit la largeur du spectre**.

Restriction sur β

Question :

D'où vient la restriction sur β ?

- Résultat valable sur graphes et modèles d'Ising généraux pour peu que leur matrice d'interaction A satisfasse la condition **spectrale, haute température** :

$$\beta\delta_A < 1/2, \quad \delta_A := \max \text{sp}\left(A - \frac{\lambda_1}{N} \mathbf{1}^T \mathbf{1}\right) - \min \text{sp}\left(A - \frac{\lambda_1}{N} \mathbf{1}^T \mathbf{1}\right)$$

- Vecteur propre $\mathbf{1}$ absent du fait de la contrainte. Condition spectrale semblable **sans retirer $\mathbf{1}$** valable pour dynamique de Glauber.
- Graphe aléatoire d -régulier sur N sommets : $A = (\mathbf{1}_{i \sim j})$ a un spectre dans $\{d\} \cup [-2\sqrt{d-1} - \varepsilon, 2\sqrt{d-1} + \varepsilon]$ avec probabilité $1 - o_N(1)$.
 \Rightarrow retirer le mode constant **réduit la largeur du spectre**.

Restriction sur β

Question :

D'où vient la restriction sur β ?

- Résultat valable sur graphes et modèles d'Ising généraux pour peu que leur matrice d'interaction A satisfasse la condition **spectrale, haute température** :

$$\beta\delta_A < 1/2, \quad \delta_A := \max \operatorname{sp}\left(A - \frac{\lambda_1}{N} \mathbf{1}^T \mathbf{1}\right) - \min \operatorname{sp}\left(A - \frac{\lambda_1}{N} \mathbf{1}^T \mathbf{1}\right)$$

- Vecteur propre $\mathbf{1}$ absent du fait de la contrainte. Condition spectrale semblable **sans retirer $\mathbf{1}$** valable pour dynamique de Glauber.
- Graphe aléatoire d -régulier sur N sommets : $A = (\mathbf{1}_{i \sim j})$ a un spectre dans $\{d\} \cup [-2\sqrt{d-1} - \varepsilon, 2\sqrt{d-1} + \varepsilon]$ avec probabilité $1 - o_N(1)$.
 \Rightarrow retirer le mode constant **réduit la largeur du spectre**.

Structure de la preuve

- **Argument central : décomposition de la mesure.** Pour $t \in [0, \beta]$, soit $C_t = (tA + (\beta - t)\delta_A P)^{-1}$. Alors (C_t) croît, $\beta A = C_\beta^{-1}$ et l'identité Gaussienne suivante est vérifiée :

$$e^{-\frac{\beta}{2}(\sigma, A\sigma)} \propto \int_{\varphi: \sum_i \varphi_i = 0} \exp\left[-\frac{(\varphi, (C_\beta - C_t)^{-1}\varphi)}{2}\right] \exp\left[-\frac{(\sigma - \varphi, C_t^{-1}(\sigma - \varphi))}{2}\right] d\varphi.$$

- Conséquence avec $t = 0$:

$$\mathbb{E}_{\bar{\mu}_{\beta, m}}[F] = \mathbb{E}_{\nu_{0, \beta}}[\mathbb{E}_{\bar{\mu}_{0, m}^\varphi}[F]].$$

$\bar{\mu}_{0, m}^\varphi$: mesure d'Ising canonique à température infinie et champ extérieur $C_0^{-1}\varphi \propto \varphi$:

$$\bar{\mu}_{0, m}^\varphi(\sigma) = e^{V_0(\varphi)} \mathbf{1}_{\sum_i \sigma_i = Nm} \exp\left[(C_0^{-1}\varphi, \sigma)\right].$$

$\nu_{0, \beta}$: **mesure renormalisée** sur l'hyperplan $X_{N, 0} := \{\varphi \in \mathbb{R}^M : \sum_i \varphi_i = 0\}$

$$\nu_{0, \beta}(d\varphi) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}(\varphi, (C_\beta - C_0)^{-1}\varphi) - V_0(\varphi)\right] d\varphi.$$

Structure de la preuve

- **Argument central : décomposition de la mesure.** Pour $t \in [0, \beta]$, soit $C_t = (tA + (\beta - t)\delta_A P)^{-1}$. Alors (C_t) croît, $\beta A = C_\beta^{-1}$ et l'identité Gaussienne suivante est vérifiée :

$$e^{-\frac{\beta}{2}(\sigma, A\sigma)} \propto \int_{\varphi: \sum_i \varphi_i = 0} \exp\left[-\frac{(\varphi, (C_\beta - C_t)^{-1}\varphi)}{2}\right] \exp\left[-\frac{(\sigma - \varphi, C_t^{-1}(\sigma - \varphi))}{2}\right] d\varphi.$$

- Conséquence avec $t = 0$:

$$\mathbb{E}_{\bar{\mu}_{\beta, m}}[F] = \mathbb{E}_{\nu_{0, \beta}}[\mathbb{E}_{\bar{\mu}_{0, m}^\varphi}[F]].$$

$\bar{\mu}_{0, m}^\varphi$: mesure d'Ising canonique à température infinie et champ extérieur $C_0^{-1}\varphi \propto \varphi$:

$$\bar{\mu}_{0, m}^\varphi(\sigma) = e^{V_0(\varphi)} \mathbf{1}_{\sum_i \sigma_i = Nm} \exp\left[(C_0^{-1}\varphi, \sigma)\right].$$

$\nu_{0, \beta}$: mesure renormalisée sur l'hyperplan $X_{N, 0} := \{\varphi \in \mathbb{R}^M : \sum_i \varphi_i = 0\}$

$$\nu_{0, \beta}(d\varphi) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}(\varphi, (C_\beta - C_0)^{-1}\varphi) - V_0(\varphi)\right] d\varphi.$$

Structure de la preuve

- **Argument central : décomposition de la mesure.** Pour $t \in [0, \beta]$, soit $C_t = (tA + (\beta - t)\delta_A P)^{-1}$. Alors (C_t) croît, $\beta A = C_\beta^{-1}$ et l'identité Gaussienne suivante est vérifiée :

$$e^{-\frac{\beta}{2}(\sigma, A\sigma)} \propto \int_{\varphi: \sum_i \varphi_i = 0} \exp\left[-\frac{(\varphi, (C_\beta - C_t)^{-1}\varphi)}{2}\right] \exp\left[-\frac{(\sigma - \varphi, C_t^{-1}(\sigma - \varphi))}{2}\right] d\varphi.$$

- Conséquence avec $t = 0$:

$$\mathbb{E}_{\bar{\mu}_{\beta, m}}[F] = \mathbb{E}_{\nu_{0, \beta}}[\mathbb{E}_{\bar{\mu}_{0, m}^\varphi}[F]].$$

$\bar{\mu}_{0, m}^\varphi$: mesure d'Ising canonique à température infinie et champ extérieur $C_0^{-1}\varphi \propto \varphi$:

$$\bar{\mu}_{0, m}^\varphi(\sigma) = e^{V_0(\varphi)} \mathbf{1}_{\sum_i \sigma_i = Nm} \exp\left[(C_0^{-1}\varphi, \sigma)\right].$$

$\nu_{0, \beta}$: **mesure renormalisée** sur l'hyperplan $X_{N, 0} := \{\varphi \in \mathbb{R}^{[M]} : \sum_i \varphi_i = 0\}$

$$\nu_{0, \beta}(d\varphi) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}(\varphi, (C_\beta - C_0)^{-1}\varphi) - V_0(\varphi)\right] d\varphi.$$

But :

Pour une dynamique longue portée bien choisie, $\text{Ent}_{\bar{\mu}_{\beta,m}}(F) \leq C_{\beta} D_{\bar{\mu}_{\beta,m}}^{LR}(F, \log F)$.

$$\text{Ent}_{\bar{\mu}_{\beta,m}}(F) = \text{Ent}_{\nu_{0,\beta}}(\mathbb{E}_{\bar{\mu}_{0,m}^{\varphi}}[F]) + \underbrace{\mathbb{E}_{\nu_{0,\beta}} \left[\text{Ent}_{\bar{\mu}_{0,m}^{\varphi}}(F) \right]}_{\text{Ising à température infinie}}$$

- Mesure renormalisée $\nu_{0,\beta}$ sur $\{\varphi \in \mathbb{R}^N : \sum_i \varphi_i = 0\}$: (m)LSI par Bakry-Émery car $\inf_{\varphi} \text{Hess } V_0(\varphi) \geq c_{\beta} > 0$ sous la condition spectrale $\beta\delta_A < 1/2$.
- $\mu_{0,m}^{\varphi}$: Bernoulli produit conditionnée à sa somme. mLSI uniforme en φ, m, N prouvé pour une certaine dynamique longue portée, la “down-up walk” (Anari et al.) :

$$\text{Ent}_{\bar{\mu}_{0,m}^{\varphi}}(F) \leq D_{\bar{\mu}_{0,m}^{\varphi}}^{\text{du}}(F, \log F).$$

- Quelques points techniques (contraction de l'entropie) pour obtenir, pour $\beta\delta_A < 1/2$,

$$\text{Ent}_{\bar{\mu}_{\beta,m}}(F) \leq C_{\beta} D_{\bar{\mu}_{\beta,m}}^{\text{du}}(F, \log F).$$

Implique mLSI pour Kawasaki par un argument de chemin classique.

But :

Pour une dynamique longue portée bien choisie, $\text{Ent}_{\bar{\mu}_{\beta,m}}(F) \leq C_{\beta} D_{\bar{\mu}_{\beta,m}}^{LR}(F, \log F)$.

$$\text{Ent}_{\bar{\mu}_{\beta,m}}(F) = \text{Ent}_{\nu_{0,\beta}}(\mathbb{E}_{\bar{\mu}_{0,m}^{\varphi}}[F]) + \mathbb{E}_{\nu_{0,\beta}} \left[\underbrace{\text{Ent}_{\bar{\mu}_{0,m}^{\varphi}}(F)}_{\text{Ising à température infinie}} \right]$$

- Mesure renormalisée $\nu_{0,\beta}$ sur $\{\varphi \in \mathbb{R}^N : \sum_i \varphi_i = 0\}$: (m)LSI par Bakry-Émery car $\inf_{\varphi} \text{Hess } V_0(\varphi) \geq c_{\beta} > 0$ sous la condition spectrale $\beta\delta_A < 1/2$.
- $\mu_{0,m}^{\varphi}$: Bernoulli produit conditionnée à sa somme. mLSI uniforme en φ, m, N prouvé pour une certaine dynamique longue portée, la “down-up walk” (Anari et al.) :

$$\text{Ent}_{\bar{\mu}_{0,m}^{\varphi}}(F) \leq D_{\bar{\mu}_{0,m}^{\varphi}}^{\text{du}}(F, \log F).$$

- Quelques points techniques (contraction de l'entropie) pour obtenir, pour $\beta\delta_A < 1/2$,

$$\text{Ent}_{\bar{\mu}_{\beta,m}}(F) \leq C_{\beta} D_{\bar{\mu}_{\beta,m}}^{\text{du}}(F, \log F).$$

Implique mLSI pour Kawasaki par un argument de chemin classique.

But :

Pour une dynamique longue portée bien choisie, $\text{Ent}_{\bar{\mu}_{\beta,m}}(F) \leq C_{\beta} D_{\bar{\mu}_{\beta,m}}^{LR}(F, \log F)$.

$$\text{Ent}_{\bar{\mu}_{\beta,m}}(F) = \text{Ent}_{\nu_{0,\beta}}(\mathbb{E}_{\bar{\mu}_{0,m}^{\varphi}}[F]) + \mathbb{E}_{\nu_{0,\beta}} \left[\underbrace{\text{Ent}_{\bar{\mu}_{0,m}^{\varphi}}(F)}_{\text{Ising à température infinie}} \right]$$

- Mesure renormalisée $\nu_{0,\beta}$ sur $\{\varphi \in \mathbb{R}^N : \sum_i \varphi_i = 0\}$: (m)LSI par Bakry-Émery car $\inf_{\varphi} \text{Hess } V_0(\varphi) \geq c_{\beta} > 0$ sous la condition spectrale $\beta\delta_A < 1/2$.
- $\mu_{0,m}^{\varphi}$: Bernoulli produit conditionnée à sa somme. mLSI uniforme en φ, m, N prouvé pour une certaine dynamique longue portée, la “down-up walk” (Anari et al.) :

$$\text{Ent}_{\bar{\mu}_{0,m}^{\varphi}}(F) \leq D_{\bar{\mu}_{0,m}^{\varphi}}^{\text{du}}(F, \log F).$$

- Quelques points techniques (contraction de l'entropie) pour obtenir, pour $\beta\delta_A < 1/2$,

$$\text{Ent}_{\bar{\mu}_{\beta,m}}(F) \leq C_{\beta} D_{\bar{\mu}_{\beta,m}}^{\text{du}}(F, \log F).$$

Implique mLSI pour Kawasaki par un argument de chemin classique.

But :

Pour une dynamique longue portée bien choisie, $\text{Ent}_{\bar{\mu}_{\beta,m}}(F) \leq C_{\beta} D_{\bar{\mu}_{\beta,m}}^{LR}(F, \log F)$.

$$\text{Ent}_{\bar{\mu}_{\beta,m}}(F) = \text{Ent}_{\nu_{0,\beta}}(\mathbb{E}_{\bar{\mu}_{0,m}^{\varphi}}[F]) + \mathbb{E}_{\nu_{0,\beta}} \left[\underbrace{\text{Ent}_{\bar{\mu}_{0,m}^{\varphi}}(F)}_{\text{Ising à température infinie}} \right]$$

- Mesure renormalisée $\nu_{0,\beta}$ sur $\{\varphi \in \mathbb{R}^N : \sum_i \varphi_i = 0\}$: (m)LSI par Bakry-Émery car $\inf_{\varphi} \text{Hess } V_0(\varphi) \geq c_{\beta} > 0$ sous la condition spectrale $\beta\delta_A < 1/2$.
- $\mu_{0,m}^{\varphi}$: Bernoulli produit conditionnée à sa somme. mLSI uniforme en φ, m, N prouvé pour une certaine dynamique longue portée, la “down-up walk” (Anari et al.) :

$$\text{Ent}_{\bar{\mu}_{0,m}^{\varphi}}(F) \leq D_{\bar{\mu}_{0,m}^{\varphi}}^{\text{du}}(F, \log F).$$

- Quelques points techniques (contraction de l'entropie) pour obtenir, pour $\beta\delta_A < 1/2$,

$$\text{Ent}_{\bar{\mu}_{\beta,m}}(F) \leq C_{\beta} D_{\bar{\mu}_{\beta,m}}^{\text{du}}(F, \log F).$$

Implique mLSI pour Kawasaki par un argument de chemin classique.

But :

Pour une dynamique longue portée bien choisie, $\text{Ent}_{\bar{\mu}_{\beta,m}}(F) \leq C_{\beta} D_{\bar{\mu}_{\beta,m}}^{LR}(F, \log F)$.

$$\text{Ent}_{\bar{\mu}_{\beta,m}}(F) = \text{Ent}_{\nu_{0,\beta}}(\mathbb{E}_{\bar{\mu}_{0,m}^{\varphi}}[F]) + \mathbb{E}_{\nu_{0,\beta}} \left[\underbrace{\text{Ent}_{\bar{\mu}_{0,m}^{\varphi}}(F)}_{\text{Ising à température infinie}} \right]$$

- Mesure renormalisée $\nu_{0,\beta}$ sur $\{\varphi \in \mathbb{R}^N : \sum_i \varphi_i = 0\}$: (m)LSI par Bakry-Émery car $\inf_{\varphi} \text{Hess } V_0(\varphi) \geq c_{\beta} > 0$ sous la condition spectrale $\beta\delta_A < 1/2$.
- $\mu_{0,m}^{\varphi}$: Bernoulli produit conditionnée à sa somme. mLSI uniforme en φ, m, N prouvé pour une certaine dynamique longue portée, la “down-up walk” (Anari et al.) :

$$\text{Ent}_{\bar{\mu}_{0,m}^{\varphi}}(F) \leq D_{\bar{\mu}_{0,m}^{\varphi}}^{\text{du}}(F, \log F).$$

- Quelques points techniques (contraction de l'entropie) pour obtenir, pour $\beta\delta_A < 1/2$,

$$\text{Ent}_{\bar{\mu}_{\beta,m}}(F) \leq C_{\beta} D_{\bar{\mu}_{\beta,m}}^{\text{du}}(F, \log F).$$

Implique mLSI pour Kawasaki par un argument de chemin classique.

Résumé et conclusion

- Dynamique de Glauber **ralentit** au point critique β_c du fait d'une ou plusieurs observables dont l'aimantation.
- La dynamique de Kawasaki pour le modèle d'Ising conditionné sur l'aimantation **reste rapide au delà de la transition** sur certains graphes non triviaux.

Ingrédients clés de la preuve :

- **Décomposition de la mesure.**
- Réduction au cas d'Ising en **température infinie** et champ aléatoire par estimées spectrales (contraction de l'entropie, Eldan–Chen).
- mLSI à température infinie pour une bonne dynamique longue-portée (Anari et al.)

Questions ouvertes

- Seuil optimal en β ?
- Modèles où conditionner sur plus que l'aimantation aide ? “Nombre” d'observables lentes ?

Résumé et conclusion

- Dynamique de Glauber **ralentit** au point critique β_c du fait d'une ou plusieurs observables dont l'aimantation.
- La dynamique de Kawasaki pour le modèle d'Ising conditionné sur l'aimantation **reste rapide au delà de la transition** sur certains graphes non triviaux.

Ingrédients clés de la preuve :

- **Décomposition de la mesure.**
- Réduction au cas d'Ising en **température infinie** et champ aléatoire par estimées spectrales (contraction de l'entropie, Eldan–Chen).
- mLSI à température infinie pour une bonne dynamique longue-portée (Anari et al.)

Questions ouvertes

- Seuil optimal en β ?
- Modèles où conditionner sur plus que l'aimantation aide ? “Nombre” d'observables lentes ?

Résumé et conclusion

- Dynamique de Glauber **ralentit** au point critique β_c du fait d'une ou plusieurs observables dont l'aimantation.
- La dynamique de Kawasaki pour le modèle d'Ising conditionné sur l'aimantation **reste rapide au delà de la transition** sur certains graphes non triviaux.

Ingrédients clés de la preuve :

- **Décomposition de la mesure.**
- Réduction au cas d'Ising en **température infinie** et champ aléatoire par estimées spectrales (contraction de l'entropie, Eldan–Chen).
- mLSI à température infinie pour une bonne dynamique longue-portée (Anari et al.)

Questions ouvertes

- Seuil optimal en β ?
- Modèles où conditionner sur plus que l'aimantation aide ? “Nombre” d'observables lentes ?

Résumé et conclusion

- Dynamique de Glauber **ralentit** au point critique β_c du fait d'une ou plusieurs observables dont l'aimantation.
- La dynamique de Kawasaki pour le modèle d'Ising conditionné sur l'aimantation **reste rapide au delà de la transition** sur certains graphes non triviaux.

Ingrédients clés de la preuve :

- **Décomposition de la mesure.**
- Réduction au cas d'Ising en **température infinie** et champ aléatoire par estimées spectrales (contraction de l'entropie, Eldan–Chen).
- mLSI à température infinie pour une bonne dynamique longue-portée (Anari et al.)

Questions ouvertes

- Seuil optimal en β ?
- Modèles où conditionner sur plus que l'aimantation aide ? “Nombre” d'observables lentes ?